東大螢雪会 医学部数学 攻略演習

マンツーマン指導で医歯薬学部に多くの合格者を輩出している「東大螢雪会」では，主要な私立大学医学部の予想問題を作成しています。このコーナーでは，「東大螢雪会」の作成した予想問題を用いて，主要な私立大学医学部の数学を攻略するための演習を行います。隔月刊で毎号２校分の演習を行い，全12校の連載となる予定です。

今月号１校目は，北里大学医学部の数学を攻略します！

第125回 北里大学医学部 編

東大螢雪会講師　上野 尚人

北里大学医学部の数学は，制限時間80分で大問３つが出題されます。大問１は客観式（答えのみ記入）の小問集合，大問２および大問３は記述式です。今回の予想問題では６割程度の得点を目指してください。

注意事項　2，3は，解答の過程を必ず記すこと。

1　次の各文の $\boxed{}$ にあてはまる答を求めよ。$\boxed{(ア)}$ には①，②，③のいずれか，$\boxed{(キ)}$ には定数項が１であるような x の３次式，他には数値を入れよ。

(1)　次の $\boxed{(ア)}$ に当てはまるものを，下の①～③の中から選べ。

> a, b を整数とする。等式 $a^4-b^4=2021$ をみたす(a, b)の組は $\boxed{(ア)}$。
> ①　無限に存在する
> ②　存在し，その組数は有限である
> ③　存在しない

(2)　任意の角度 θ について，等式 $\cos 3\theta=\boxed{(イ)}\cos^3\theta-\boxed{(ウ)}\cos\theta$，$\cos 4\theta=\boxed{(エ)}\cos^4\theta-\boxed{(オ)}\cos^2\theta+\boxed{(カ)}$ が成り立つ。$\alpha=\dfrac{\pi}{7}$，$x=\cos\alpha$ とおく。$4\alpha=\pi-3\alpha$ であることに注意すると，x についての３次方程式 $\boxed{(キ)}=0$ が得られる。

また，$\left(1-\cos\dfrac{\pi}{7}\right)\left(1-\cos\dfrac{3}{7}\pi\right)\left(1-\cos\dfrac{5}{7}\pi\right)=\boxed{(ク)}$ とわかる。

(3)　実数 x, y が，連立不等式 $x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$(2x+3y-15)(x+4y-15)\leqq 0$ をみたすとき，x^2+y^2 の最小値は $\boxed{(ケ)}$ であり，x^2+y^2 の最大値は $\boxed{(コ)}$ である。

(4)　サイコロ４個を１回振り，出た目４つの積を考える。この積が４の倍数となる確率は $\boxed{(サ)}$ で

あり，この積が20の倍数となる確率は $\boxed{\text{（シ）}}$ である。ただし，どのサイコロも1から6までの目が出る確率は $\dfrac{1}{6}$ ずつであるとする。

(5) 複素数 z, w は $|z|=1$，$w=\dfrac{5z-7}{z-4}$ をみたす。このとき $|w|$ のとりえる値の最小値は $\boxed{\text{（ス）}}$ であり，最大値は $\boxed{\text{（セ）}}$ である。

$\boxed{2}$ k を正の定数とし，xy 平面上の図形 $C: 3x^2-6x+4y^2=k$ を考える。C は，原点 $\mathrm{O}(0, 0)$ を焦点のひとつとする楕円であるとき，以下の問いに答えよ。

(1) k の値を求めよ。

(2) 原点Oを極とし，x 軸の正方向を始線とする極形式で楕円 C を表現する。このとき楕円 C は，定数 e, ℓ を用いて $r=\dfrac{\ell}{1-e\cos\theta}$ と表される。e と ℓ の値を求めよ。

(3) 楕円 C およびその内部を含む図形を y 軸のまわりに1回転させて得られる立体の体積を求めよ。

$\boxed{3}$ $x>0$ において定義された関数 $f(x)$ は x について2回微分可能である。また，$f(x)>0$，$f'(x)<0$，$f''(x)>0$ がつねに成立している。xy 平面上の図形 $C: y=f(x)$ に対し，C 上の点 $\mathrm{T}(t, f(t))$ $(t>0)$ における接線 ℓ を考える。ℓ と x 軸の交点をP，ℓ と y 軸の交点をQとする。以下の問いに答えよ。

(1) 2点P，Qの座標を $t, f(t), f'(t)$ を用いて表せ。

(2) 原点をOとするとき，三角形OPQの面積を $t, f(t), f'(t)$ を用いて表せ。

(3) 三角形OPQの面積が t によらず一定の値であるとき，つねに $tf'(t)+f(t)=0$ が成立することを示せ。さらに，$g(x)=xf(x)$ をみたす関数 g を考えることによって $f(x)=\dfrac{k}{x}$（k は正の定数）となることを示せ。

$\boxed{1}$ **【解】**

(1) $a^2=A$，$b^2=B$ とおく。0以上の整数A, Bに対して $A^2-B^2=2021$ という方程式を解く。

$$(A+B)(A-B)=2021$$

である。また，$2021=43\cdot47$ と素因数分解される。$A+B>A-B$ であること，$A+B$ が0以上の整数であることに注意すると

$$(A+B, A-B)=(2021, 1), (47, 43)$$
$$(A, B)=(1011, 1010), (45, 2)$$

が得られる。いずれの組に対しても a, b は整数にならない。よって整数解は存在しない。

③… $\boxed{\text{（ア）}}$

(2)
$$\begin{aligned}\cos3\theta&=\cos(2\theta+\theta)\\&=\cos2\theta\cos\theta-\sin2\theta\sin\theta\\&=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2\sin^2\theta\cos\theta\\&=(2\cos^3\theta-\cos\theta)-2(1-\cos^2\theta)\cos\theta\end{aligned}$$

$=4\cos^3\theta-3\cos\theta\cdots$ $\boxed{\text{（イ）}}$，$\boxed{\text{（ウ）}}$

$\cos 4\theta=\cos 2(2\theta)=2\cos^2(2\theta)-1$
$=2(2\cos^2\theta-1)^2-1$
$=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$

$\cdots$ $\boxed{\text{（エ）}}$，$\boxed{\text{（オ）}}$，$\boxed{\text{（カ）}}$

ここで，$\cos 4\alpha=\cos(\pi-3\alpha)$ より

$\cos 4\alpha=-\cos 3\alpha$
$8x^4-8x^2+1=-(4x^3-3x)$
$8x^4+4x^3-8x^2-3x+1=0$
$(x+1)(8x^3-4x^2-4x+1)=0$

$x=\cos\dfrac{\pi}{7}\neq-1$ より

$8x^3-4x^2-4x+1=0\cdots$ $\boxed{\text{（キ）}}$

$\alpha=\dfrac{\pi}{7},\dfrac{3}{7}\pi,\dfrac{5}{7}\pi$ はいずれも$\cos 4\alpha=\cos(\pi-3\alpha)$ をみたす。また $a=\cos\dfrac{\pi}{7}$，$b=\dfrac{3}{7}\pi$，$c=\dfrac{5}{7}\pi$ の値はすべて異なるので，a, b, c は x の 3 次方程式 $8x^3-4x^2-4x+1=0$ の 3 つの解。

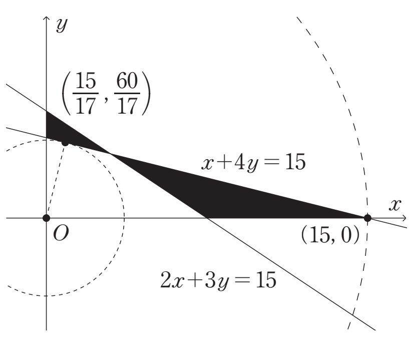
$8x^3-4x^2-4x+1=8(x-a)(x-b)(x-c)$

が x の恒等式なので，両辺に $x=1$ を代入して

$1=8(1-a)(1-b)(1-c)$

$(1-a)(1-b)(1-c)=\dfrac{1}{8}\cdots$ $\boxed{\text{（ク）}}$

(3) 連立不等式をみたす点(x, y)を座標平面上に表す。



x^2+y^2 は，原点から点(x, y)までの距離の 2 乗を表す。原点から最も近い点と最も遠い点を考える。

原点から直線 $2x+3y-15=0$ までの距離は

$$\frac{|-15|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{15}{\sqrt{13}}$$

原点から直線 $x+4y-15=0$ までの距離は

$$\frac{|-15|}{\sqrt{1^2+4^2}}=\frac{15}{\sqrt{17}}$$

2 つのうち小さいほうの値は $\dfrac{15}{\sqrt{17}}$ なので，最小値は

$\left(\dfrac{15}{\sqrt{17}}\right)^2=\dfrac{225}{17}\cdots$ $\boxed{\text{（ケ）}}$

原点から最も遠い点は$(15, 0)$なので，最大値は $15^2=225\cdots$ $\boxed{\text{（コ）}}$

(4) 「積が 2 の倍数である確率」を p，「積が 2 の倍数であるが 4 の倍数でない確率」を q，「積が 2 の倍数であるが 5 の倍数でない」確率を r，「積が 2 の倍数であるが 4 の倍数でなく 5 の倍数でない」確率を s とする。

サイコロの目を以下のグループに分類しておく。

$A=\{2, 6\}, B=\{4\}, C=\{1, 3\}, D=\{5\}$

p について：

「すべて C または D の目が出る」の余事象で考えて

$$p=1-\left(\frac{3}{6}\right)^4=\frac{15}{16}$$

q について：

「A の目が 1 回，C または D の目が 3 回出る確率」なので

$$q=\frac{4!}{1!3!}\cdot\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{3}{6}\right)^3=\frac{1}{6}$$

よって，出た目の積が 4 の倍数となる確率は

$p-q=\dfrac{37}{48}\cdots$ $\boxed{\text{（サ）}}$

r について：

「すべて A または B または C の目が出る」事象から「すべて C の目が出る」事象を除くので

$$r=\left(\frac{5}{6}\right)^4-\left(\frac{2}{6}\right)^4=\frac{609}{1296}$$

s について：

「すべて A または C の目が出る」事象から「す

べてCの目が出る」事象を除くので

$$s=\left(\frac{4}{6}\right)^4-\left(\frac{2}{6}\right)^4=\frac{15}{81}$$

よって，出た目の積が20の倍数となる確率は

$$(p-q)-(r-s)=\frac{35}{72}\cdots\boxed{（シ）}$$

(5)　$w=\dfrac{5z-7}{z-4}$ を変形して

$$(z-4)w=5z-7$$
$$z(w-5)=4w-7$$
$$z=\frac{4w-7}{w-5}$$

これを $|z|=1$ に代入，変形して

$$\left|\frac{4w-7}{w-5}\right|=1$$
$$|4w-7|^2=|w-5|^2$$
$$16|w|^2-28w-28\bar{w}+49=|w|^2-5w-5\bar{w}+25$$
$$|w|^2-\frac{23}{15}w-\frac{23}{15}\bar{w}+\frac{24}{15}=0$$
$$\left|w-\frac{23}{15}\right|^2=\frac{169}{225}$$

よって，w が表す点は $\dfrac{23}{15}$ を中心とし半径が $\dfrac{13}{15}$ である円。

$|w|$ の最小値は $\dfrac{23}{15}-\dfrac{13}{15}=\dfrac{2}{3}\cdots\boxed{（ス）}$

$|w|$ の最大値は $\dfrac{23}{15}+\dfrac{13}{15}=\dfrac{12}{5}\cdots\boxed{（セ）}$

$\boxed{2}$ 【解】

(1)　C の式を変形して

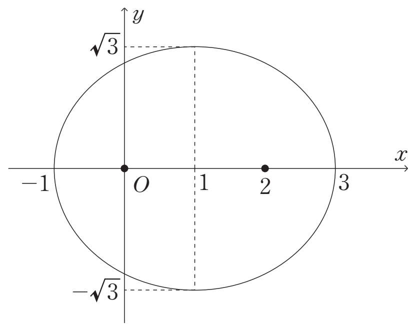
$$3(x-1)^2+4y^2=k+3$$
$$\frac{(x-1)^2}{\frac{k+3}{3}}+\frac{y^2}{\frac{k+3}{4}}=1$$

ここで $a=\sqrt{\dfrac{k+3}{3}}$，$b=\sqrt{\dfrac{k+3}{4}}$ とする。$a>b$ である。

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の焦点は $(\pm\sqrt{a^2-b^2}\,,0)$ なので，楕円 C の焦点は $(1\pm\sqrt{a^2-b^2}\,,0)$ である。

よって $1-\sqrt{a^2-b^2}=0$ より $a^2-b^2=1$

$$\frac{k+3}{3}-\frac{k+3}{4}=1$$
$$k=9\cdots\cdots(答)$$



(2)　(1)より，楕円 C の方程式は $3(x-1)^2+4y^2=12$ である。

$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を代入，変形して

$$3(r\cos\theta-1)^2+4(r\sin\theta)^2-12=0$$
$$(3\cos^2\theta+4\sin^2\theta)r^2-(6\cos\theta)r-9=0$$
$$(4-\cos^2\theta)r^2-(6\cos\theta)r-9=0$$
$$\{(2+\cos\theta)r+3\}\{(2-\cos\theta)r-3\}=0$$

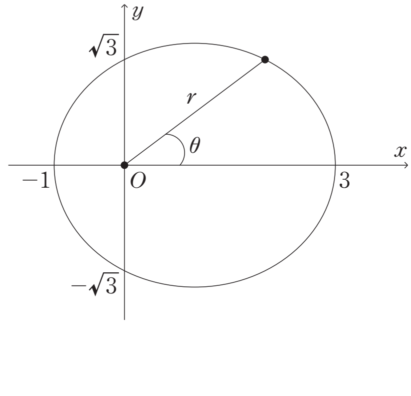
ここで，$(2+\cos\theta)r+3>0$ なので求める極方程式は

$$(2-\cos\theta)r+3=0$$

$$r=\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}\cos\theta}$$

よって $e=\dfrac{1}{2}$，$\ell=\dfrac{3}{2}\cdots\cdots(答)$

（e は二次曲線の離心率を表す）



(3) 楕円の方程式を変形して

$$x=1\pm\sqrt{4-\frac{4}{3}y^2}$$

以下，複号の正のほうを x_1，負の方を x_2 とおく。求める体積を V とする。図形は x 軸に関して対称なので

$$\frac{V}{2\pi}=\int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{3}}(x_1{}^2-x_2{}^2)\,dy+\int_0^{\frac{3}{2}}x_1{}^2dy$$

ここで

$$\int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{3}}(x_1{}^2-x_2{}^2)\,dy$$

$$=\int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{3}}4\sqrt{4-\frac{4}{3}y^2}\ dy$$

$$=8\int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{1}{3}y^2}\ dy$$

（$y=\sqrt{3}\sin\theta$ と置換して）

$$=8\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\,\sqrt{3}\cos\theta\,d\theta$$

$$=4\sqrt{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$=4\sqrt{3}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=4\sqrt{3}\left\{\left(\frac{\pi}{2}+0\right)-\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right\}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi-3$$

また，

$$\int_0^{\frac{3}{2}}x_1{}^2dy=\int_0^{\frac{3}{2}}\left(5-\frac{4}{3}y^2+2\sqrt{4-\frac{4}{3}y^2}\right)dy$$

$$=\left[5y-\frac{4}{9}y^3\right]_0^{\frac{3}{2}}+4\int_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{3}y^2}\ dy$$

（後半は $y=\sqrt{3}\sin\theta$ と置換して）

$$=5\cdot\frac{3}{2}-\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3+4\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{15}{2}-\frac{3}{2}+2\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$=6+2\sqrt{3}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=6+2\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{15}{2}$$

よって

$$V=2\pi\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi-3+\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{15}{2}\right)$$

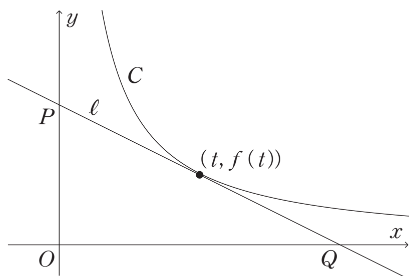
$$=\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi^2+\frac{9}{2}\pi$$ ……㊟

$\boxed{3}$ **【解】**

(1) $\ell: y=f'(t)(x-t)+f(t)$

$\mathrm{P}\left(t-\dfrac{f(t)}{f'(t)},0\right)$，

$\mathrm{Q}(0,-tf'(t)+f(t))$ ……㊟



(2) 点 P の x 座標，点 Q の y 座標はともに正なので，求める面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\left(t-\frac{f(t)}{f'(t)}\right)\cdot(-tf'(t)+f(t))$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{(tf'(t)-f(t))^2}{f'(t)}$$ ……㊟

(3) 以下，$f(t)$ を f，$f'(t)$ を f'，$f''(t)$ を f'' と略す。$\dfrac{(tf'-f)^2}{f'}$ の値が t によらず一定なので

$$\left(\frac{(tf'-f)^2}{f'}\right)'=0$$

$$\frac{2(tf'-f)(tf'-f)'\cdot f'-(tf'-f)^2\cdot f''}{f'^2}=0$$

$$\frac{2(tf'-f)\cdot tf''\cdot f'-(tf'-f)^2\cdot f''}{f'^2}=0$$

$$\frac{(tf'-f)f''}{f'^2}\cdot(2tf'-(tf'-f))=0$$

$$\frac{(tf'-f)f''}{f'^2}\cdot(tf'+f)=0$$

ここで $tf'<0$，$f>0$ より $tf'-f<0$ である。また $f''>0$ なので

$$tf'+f=0$$

がつねに成立する。【証明終】

$f(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ の両辺を x について微分して

$$f'(x)=\frac{g'(x)\cdot x-g(x)\cdot 1}{x^2}=\frac{xg'(x)-g(x)}{x^2}$$

これを $xf'(x)+f(x)=0$ に代入して

$$x\cdot\frac{xg'(x)-g(x)}{x^2}+\frac{g(x)}{x}=0$$

$$g'(x)=0$$

よって $g(x)$ は x によらない定数である。

$g(x)=k\,(>0)$ とおくと

$$f(x)=\frac{k}{x},\ f'(x)=-\frac{k}{x^2},\ f''(x)=\frac{2k}{x^3}$$

となり，これは題意をみたす。【証明終】

10月号では，聖マリアンナ医科大学と愛知医科大学の数学を攻略しますので，ご期待ください！

全12校の掲載予定は以下のとおりとなっております。

第121回／4月号　東邦大学医学部
第122回／4月号　東京女子医科大学
第123回／6月号　金沢医科大学
第124回／6月号　岩手医科大学
第125回／8月号　北里大学医学部
第126回／8月号　日本大学医学部
第127回／10月号　聖マリアンナ医科大学
第128回／10月号　愛知医科大学
第129回／12月号　東京医科大学
第130回／12月号　杏林大学医学部
第131回／2月号　東京慈恵会医科大学
第132回／2月号　昭和大学医学部