東大螢雪会 医学部数学 攻略演習

マンツーマン指導で医歯薬学部に多くの合格者を輩出している「東大螢雪会」では，主要な私立大学医学部の予想問題を作成しています。このコーナーでは，「東大螢雪会」の作成した予想問題を用いて，主要な私立大学医学部の数学を攻略するための演習を行います。隔月刊で毎号２校分の演習を行い，全12校の連載となる予定です。

今月号２校目は，岩手医科大学の数学を攻略します！

第124回 岩手医科大学 編

東大螢雪会講師　上野 尚人

岩手医科大学の数学は，制限時間60分で大問３つが出題されます。解答方式は大学入試センター試験と同様「桁数指定のマークセンス方式」です。第１問は小問集合，第２問および第３問は誘導のついた大問になっています。出題量が多く素早い処理を要求されます。今回の予想問題では６割程度の得点を目指してください。

$\boxed{1}$

⑴ 座標平面上に A$(8, 27)$ をとり，A を通り傾きが負である直線 ℓ を考える。ℓ と x 軸の交点を P，ℓ と y 軸の交点を Q としたとき，三角形 OPQ の面積の最小値は $\boxed{\text{アイウ}}$ であり，線分 PQ の長さの最小値は $\boxed{\text{エオ}}\sqrt{\boxed{\text{カキ}}}$ である。

⑵ 複素数 α は等式 $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6=0$ をみたす。

このとき $A=\dfrac{1}{1-\alpha}+\dfrac{1}{1-\alpha^2}+\dfrac{1}{1-\alpha^3}+\dfrac{1}{1-\alpha^4}+\dfrac{1}{1-\alpha^5}+\dfrac{1}{1-\alpha^6}$ の値は $\boxed{\text{ク}}$,

$B=\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}$ の値は $-\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$，$C=|\alpha+i|^2+|\alpha-i|^2$ の値は $\boxed{\text{サ}}$ である。

⑶ A，B，C，D の４種類の文字からなる長さ n（正の整数）の文字列がある。このような文字列のうち，同じ文字が連続して現れないものは $\boxed{\text{シ}}\cdot\boxed{\text{ス}}^{n-1}$ 通りである。また，長さ n の文字列のうち A が奇数回現れるもの（同じ文字が連続していてもよい）は $\boxed{\text{セ}}\cdot\boxed{\text{ソ}}^{n-1}-\boxed{\text{タ}}^{n-1}$ 通りである。

$\boxed{2}$ 座標空間に連立不等式 $x^2+y^2\leqq 1,\ 0\leqq z\leqq\sqrt{3}$ であらわされる円柱がある。この円柱を平面 $\alpha : z=2y$ で切断して得られる２つの立体のうち，点 $(0, 1, 0)$ を含むほうを A とする。次の⑴〜⑶ に答えよ。

(1) 平面 α による円柱の切断面の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}\pi$ である。

(2) A の体積は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(3) A の側面積（表面のうち曲面になっている部分の面積）は $\boxed{\text{オ}}$ である。

$\boxed{3}$ $f(x)=x^4-6x^3+11x^2$ とする。次の(1)〜(2)に答えよ。

(1) 直線 ℓ が $y=f(x)$ のグラフと異なる 2 点で接するとき，ℓ の方程式は $y=\boxed{\text{ア}}x-\boxed{\text{イ}}$ である。

(2) (1)で求めた直線 ℓ と曲線 $y=f(x)$ で囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ である。

$\boxed{1}$ **【解】**

(1) 直線 ℓ の傾きを $-k\,(k>0)$ とおくと，その方程式は

$$y-27=k(x-8)$$

であり，点 P と点 Q の座標は

$$\mathrm{P}\left(8+\frac{27}{k}\right),\ \mathrm{Q}(8k+27,0)$$

である。三角形 OPQ の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\left(8+\frac{27}{k}\right)(8k+27)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(8k+27)^2}{k}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(64k+432+\frac{729}{k}\right)$$

相加平均と相乗平均の大小関係より

$$\frac{1}{2}\left(64k+\frac{729}{k}\right)\geqq\sqrt{64k\cdot\frac{729}{k}}$$

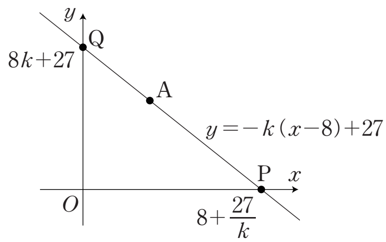
$$\frac{1}{2}\left(64k+\frac{729}{k}\right)\geqq 216$$

$$64k+\frac{729}{k}\geqq 432$$

(等号成立は $64k=\dfrac{729}{k}$, すなわち $k=\dfrac{27}{8}$ のとき)

よって，$k=\dfrac{27}{8}$ のとき面積 S は最小値

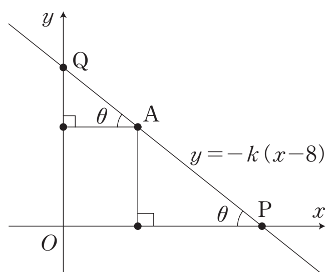
432 … $\boxed{\text{アイウ}}$ をとる。



次に，PQ の長さを L とする。

$k=\tan\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$L=\mathrm{PA}+\mathrm{AQ}=\frac{27}{\sin\theta}+\frac{8}{\cos\theta}$$



$$dL=\frac{27\cos\theta}{\sin^2\theta}+\frac{8\sin\theta}{\cos^2\theta}$$
$$=\frac{-27\cos^3\theta+8\sin^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$
$$=\frac{\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}\cdot(-27+8\tan^3\theta)$$

増減表をかくことにより，$\tan\theta=\sqrt[3]{\frac{27}{8}}=\frac{3}{2}$ において L が最大となることがわかる。

このとき

$$\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{13}},\ \cos\theta=\frac{2}{\sqrt{13}}$$

なので L の最小値は

$$27\cdot\frac{\sqrt{13}}{3}+8\cdot\frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$13\sqrt{13}\ \dots\ \boxed{\text{エオ}}\sqrt{\boxed{\text{カキ}}}$$

(2)　与えられた等式は $\alpha=1$ のとき成立しない。$\alpha\neq1$ のもとで等比数列の和の公式を用いて

$$\frac{1-\alpha^7}{1-\alpha}=0$$

よって $\alpha^7=1$ とわかる。ここで

$$\frac{1}{1-\alpha}+\frac{1}{1-\alpha^6}=\frac{(1-\alpha)+(1-\alpha^6)}{(1-\alpha)(1-\alpha^6)}$$
$$=\frac{2-\alpha-\alpha^6}{1-\alpha-\alpha^6+\alpha^7}$$
$$=\frac{2-\alpha-\alpha^6}{1-\alpha-\alpha^6+1}=1$$

同様に

$$=\frac{1}{1-\alpha^2}+\frac{1}{1-\alpha^5}=1$$
$$\frac{1}{1-\alpha^3}+\frac{1}{1-\alpha^4}=1$$

もいえるので，$A=3\ \dots\ \boxed{\text{ク}}$

$\alpha^7=1$ より $|\alpha|=1$ であり，

$$\alpha^6=\frac{1}{\alpha}=\overline{(\alpha)}$$

$$\alpha^5=\frac{1}{\alpha^2}=\overline{(\alpha^2)}$$

$$\alpha^4=\frac{1}{\alpha^3}=\overline{(\alpha^3)}$$

とわかる。よって与えられた等式より

$$1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\overline{(\alpha^3)}+\overline{(\alpha^2)}+\overline{(\alpha)}=0$$
$$(\alpha+\alpha^2+\alpha^3)+\overline{(\alpha+\alpha^2+\alpha^3)}+1=0$$

B の値は $\alpha+\alpha^2+\alpha^3$ の実数部分の値と一致し，

その値は $-\frac{1}{2}\ \dots\ \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$

$$C=(\alpha+i)\overline{(\alpha+i)}+(\alpha-i)\overline{(\alpha-i)}$$
$$=(\alpha+i)(\overline{\alpha}-i)+(\alpha-i)(\overline{\alpha}+i)$$
$$=(\alpha\overline{\alpha}-i\alpha+i\overline{\alpha}-i^2)+(\alpha\overline{\alpha}+i\alpha-i\overline{\alpha}-i^2)$$
$$=2|\alpha|^2+2=4\ \dots\ \boxed{\text{サ}}$$

(3)　同じ文字が連続して現れない文字列については，先頭の文字が 4 通り，それ以降の文字は「直前と異なるもの」で 3 通りなので

$$4\cdot3\cdot3\cdot\ \cdots\ \cdot3=43^{n-1}\ \dots\ \boxed{\text{シ}},\ \boxed{\text{ス}}$$

次に，「長さ n の文字列（ぜんぶで 4^n 通り）」のうち A が奇数回現れるものを a_n 個とする。A が偶数階現れるものは 4^n-a_n 個である。

この「長さ n の文字列」の末尾に 1 文字を付け加えることで，長さ $n+1$ の文字列のうち A が奇数回現れるものについては

$$a_{n+1}=a_n\cdot3+(4^n-a_n)=2a_n+4^n$$

という漸化式が得られる。漸化式の両辺を
で割って

$$\frac{a_{n+1}}{4^{n+1}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a_n}{4^n}+\frac{1}{4}$$
$$\frac{a_{n+1}}{4^{n+1}}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{a_n}{4^n}-\frac{1}{2}\right)$$

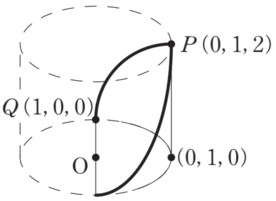
よって $\left\{\frac{a_n}{4^n}-\frac{1}{2}\right\}$ は公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列。その初項は

$$\frac{a_1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$$

よって

$$\frac{a_n}{4^n}-\frac{1}{2}=\left(-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$\frac{a_n}{4^n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$a_n=2\cdot4^{n-1}-2^{n-1}\ \dots\ \boxed{\text{セ}},\ \boxed{\text{ソ}},\ \boxed{\text{タ}}$$

$\boxed{2}$ 【解】

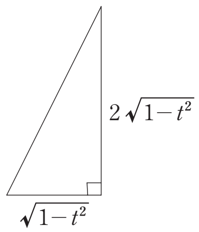


(1)　切断面は「楕円の半分」である。立体 A のうち z 座標のもっとも大きい点を P (0, 1, 2), 円柱の底円上にあり x 座標のもっとも大きい点を Q (1, 0, 0) とすると，楕円の長半径（長軸の長さの半分）は $\mathrm{OP}=\sqrt{5}$, 楕円の短半径（短軸の長さの半分）は $\mathrm{OQ}=1$ である。

よって求める断面積は

$$\pi\cdot\sqrt{5}\cdot 1\div 2=\dots\frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}$$

(2)　立体 A を平面 $x=t\,(-1\leqq t\leqq 1)$ で切ったときの断面を考える。その断面は直角三角形であり，三角形の底辺の長さは（底円との交点の y 座標より）$\sqrt{1-t^2}$, 三角形の高さは（断面の傾きが 2 であることより）$2\sqrt{1-t^2}$ である。



よって断面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1-t^2}\cdot 2\sqrt{1-t^2}=1-t^2$$

であり，求める体積は

$$\int_{-1}^{1}(1-t^2)\,dt=2\int_{0}^{1}(1-t^2)\,dt$$

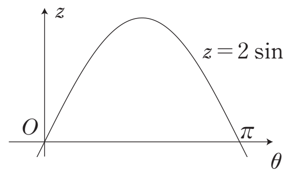
$$=\left[2t-\frac{2}{3}t^3\right]_0^1=\frac{4}{3}\dots\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

(3)　立体 A の側面部分を切り開き，底円だった部分（線分になる）を横軸（θ 軸）にとると，断面だった部分は

曲線 $z=2\sin\theta\,(0\leqq\theta\leqq\pi)$

となる。この曲線と θ 軸によって囲まれる部分の面積なので

$$\int_0^{\pi}2\sin\theta d\theta=[-2\cos\theta]_0^{\pi}=4\dots\boxed{\text{オ}}$$



$\boxed{3}$ 【解】

(1)　異なる 2 つの接点を

$\mathrm{P}(p, f(p))$, $\mathrm{Q}(q, f(q))\ (p<q)$

とおく。

直線 ℓ の方程式を $y=g(x)$ とおくと

$$f(x)-g(x)=(x-p)^2(x-q)^2$$

と因数分解される。これを変形して

$$\begin{aligned}f(x)-g(x)&=\{(x-p)(x-q)\}^2\\&=\{x^2-(p+q)x+pq\}^2\\&=x^4-2(p+q)x^3+\{(p+q)^2+2pq\}x^2\\&\qquad-2pq(p+q)x+(pq)^2\end{aligned}$$

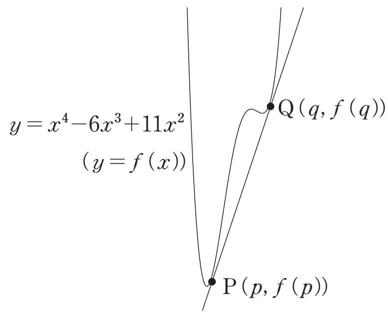
$g(x)$ は 1 次以下の多項式なので，x^3 の係数および x^2 の係数を比較して

$$-2(p+q)=-6,\ (p+q)^2+2pq=11$$

よって $p+q=3$, $pq=1$

これを(*)に代入することで，$g(x)$ の方程式は

$$y=6x-1\dots\boxed{\text{ア}},\boxed{\text{イ}}$$



(2)　求める面積は

$$\int_p^q f(x)-g(x)\,dx=\int_p^q(x-p)^2(x-q)^2\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-p)^3(x-q)^2\right]_p^q$$

$$-\int_p^q \frac{1}{3}(x-p)^3\cdot 2(x-q)\,dx$$

$$=(0-0)-\frac{2}{3}\int_p^q (x-p)^3(x-q)\,dx$$

$$=-\frac{2}{3}\left[\frac{1}{4}(x-p)^4(x-q)\right]_p^q$$

$$+\frac{2}{3}\int_p^q \frac{1}{4}(x-p)^4\cdot 1dx$$

$$=-(0-0)+\frac{1}{6}\int_p^q \frac{1}{4}(x-p)^4\,dx$$

$$=\frac{1}{30}\left[(x-p)^5\right]_p^q=\frac{1}{30}(q-p)^5$$

ここで

$$(q-p)^2=(p+q)^2-4pq=5$$

よって求める面積は

$$\frac{1}{30}\cdot(\sqrt{5})^5=\frac{5}{6}\sqrt{5}\ \cdots\ \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$$

8月号では，北里大学医学部と日本大学医学部の数学を攻略しますので，ご期待ください！

全12校の掲載予定は以下のとおりとなっております。

第121回／4月号　東邦大学医学部
第122回／4月号　東京女子医科大学
第123回／6月号　金沢医科大学
第124回／6月号　岩手医科大学
第125回／8月号　北里大学医学部
第126回／8月号　日本大学医学部
第127回／10月号　聖マリアンナ医科大学
第128回／10月号　愛知医科大学
第129回／12月号　東京医科大学
第130回／12月号　杏林大学医学部
第131回／2月号　東京慈恵会医科大学
第132回／2月号　昭和大学医学部