東大螢雪会 医学部数学 攻略演習

マンツーマン指導で医歯薬学部に多くの合格者を輩出している「東大螢雪会」では，主要な私立大学医学部の予想問題を作成しています。このコーナーでは，「東大螢雪会」の作成した予想問題を用いて，主要な私立大学医学部の数学を攻略するための演習を行います。隔月刊で毎号２校分の演習を行い，全12校の連載となる予定です。

今月号１校目は，金沢医科大学の数学を攻略します！

第123回 金沢医科大学 編

東大螢雪会講師　上野 尚人

金沢医科大学の数学は，制限時間60分で大問４つが出題されます。解答方式は大学入試センター試験の数学Ⅰ・数学Aと同じ「符号も１桁に含めるマークセンス方式」です。内容もセンター試験と同様，細かい誘導や小問のついたものが並んでおり分量は多めです。今回の予想問題では６割程度の得点を目指してください。

$\boxed{1}$ 表と裏が出る確率が $\dfrac{1}{2}$ ずつであるようなコインが３枚ある。この３枚のコインを同時に振って表の枚数を数える，という試行を考える。この試行を n 回繰り返し行い，k 回目 $(k=1, 2, \ldots, n)$ の試行で出た表の枚数を a_k とする。また，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とする。

(1) $S_4 = 2$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエオカ}}}$ である。

(2) S_n が３の整数倍となる確率を p_n とおくと，数列 p_n に関する漸化式 $p_{n+1} = -\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} p_n + \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ が成り立つ。

(3) (2)で定義した数列 $\{p_n\}$ の一般項は $p_n = \dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} - \dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セソ}}}\left(-\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}\right)^{n-1}$ である。

$\boxed{2}$ 原点 O を中心とする半径１の円周上に３つの点 A, B, C があり，等式 $5\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 12\overrightarrow{\mathrm{OB}} - 13\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{0}$ が成立している。

(1) 三角形 ABC の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テト}}}$ である。

(2)　$\angle \mathrm{ACB} = \dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}\pi$ である。

(3)　この円を含む平面内で，O を中心として三角形 ABC を 1 回転させたときに，三角形 ABC の周および内部の通過する部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}\pi$ である。

$\boxed{3}$　xy 平面において，方程式 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ で表される曲線を C とする。C は放物線の一部であり，原点 O を中心に曲線 C を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転させて得られる曲線 C_1 の方程式は

$y=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}}{\boxed{\text{ハ}}}x^2+\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ヒ}}}}{\boxed{\text{フ}}}\left(|x| \leqq \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ヘ}}}}{\boxed{\text{ホ}}}\right)$ である。また，閉曲線 $D:\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}=1$ で囲まれる部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{マ}}}{\boxed{\text{ミ}}}$ である。さらに，閉曲線 D 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$ において D と接する直線を ℓ としたとき，D と ℓ の交点のうち第 2 象限にあるものの座標は $\left(-\dfrac{\boxed{\text{ム}}}{\boxed{\text{メモ}}}, \dfrac{\boxed{\text{ヤ}}}{\boxed{\text{ユヨ}}}\right)$ である。

$\boxed{4}$　xy 平面上の点 $\mathrm{T}(t-\sin t, 1-\cos t)$ を考える。t の値が $0 \leqq t \leqq 2\pi$ の範囲を変化するときに点 T が描く曲線を C とする。C と x 軸で囲まれた部分の面積は $\boxed{\text{あ}}\pi$ であり，C を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体の体積は $\boxed{\text{い}}\pi^{\boxed{\text{う}}}$ である。また曲線 C の弧長は $\boxed{\text{え}}$ である。

$\boxed{1}$ **【解】**

(1)　ある k に対して

$$\begin{cases} a_k=0 \text{ となる確率は } \dfrac{1}{8} \\ a_k=1 \text{ となる確率は } \dfrac{3}{8} \\ a_k=2 \text{ となる確率は } \dfrac{3}{8} \\ a_k=3 \text{ となる確率は } \dfrac{1}{8} \end{cases}$$

$S_4=2$ となるのは，a_1, a_2, a_3, a_4 のうち

- 2 つが 1 に等しく，残り 2 つが 0 に等しいとき
- 1 つが 2 に等しく，残り 3 つが 0 に等しいとき

のいずれかなので，求める確率は

$${}_4\mathrm{C}_2\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^2\left(\frac{1}{8}\right)^2+{}_4\mathrm{C}_1\cdot\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{8}\right)^3$$

$$=\frac{6\cdot 9}{8^4}+\frac{4\cdot 3}{8^4}=\frac{33}{2048}\cdots\frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエオカ}}}$$

(2)　S_n が 3 の整数倍であり，かつ S_{n+1} が 3 の倍数であるのは a_{n+1} の値が 0 または 3（確率 $\dfrac{2}{8}$）のとき。

S_n が 3 で割って 1 余る整数で，かつ S_{n+1} が 3 の倍数であるのは a_{n+1} の値が 2（確率 $\dfrac{3}{8}$）のとき。

S_n が 3 で割って 2 余る整数で，かつ S_{n+1} が 3 の倍数であるのは a_{n+1} の値が 1（確率 $\dfrac{3}{8}$）のとき。

以上より，求める漸化式は

$$p_{n+1}=p_n\cdot\frac{2}{8}+(1-p_n)\cdot\frac{3}{8}$$

$$p_{n+1}=-\frac{1}{8}p_n+\frac{3}{8}\cdots\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}},\ \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

⑶　⑵で得られた漸化式を変形して

$$p_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{8}\left(p_n-\frac{1}{3}\right)$$

$$p_n-\frac{1}{3}=\left(p_1-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}$$

$p_1=\dfrac{2}{8}$ より $p_1-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{12}$ なので

$$p_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}$$

$$\cdots\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}},\ \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セソ}}},\ \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

$\boxed{2}$ **【解】**

⑴　与えられた等式より

$$5\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+12\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}=13\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$$\left|5\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+12\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=13^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2$$

$$25\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+120\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+144\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=169\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=1$ より

$$25+120\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+144=169$$

よって $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ である。

ここで O(0, 0)，A(1, 0)，B(0, 1) とおくと

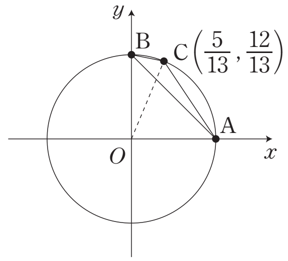
$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{5}{13}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{12}{13}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(\frac{5}{13},\frac{12}{13}\right)$$

となる。よって三角形 ABC の面積は

$$\triangle\mathrm{OAC}+\triangle\mathrm{OCB}-\triangle\mathrm{OAB}$$

$$\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{12}{13}+\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{5}{13}-\frac{1}{2}\cdot1\cdot1$$

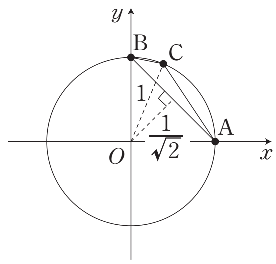
$$=\frac{2}{13}\cdots\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テト}}}$$



⑵　$\angle\mathrm{ACB}$ は，中心角 $\angle\mathrm{AOB}\left(=\dfrac{3}{2}\pi\right)$ に対する円周角なので

$$\angle\mathrm{ACB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\pi=\frac{3}{4}\pi\cdots\frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$$

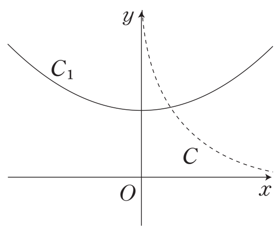
⑶　三角形 ABC の周および内部の点のうち，O からもっとも離れているのは頂点 A, B, C でありその距離は 1 である。
また，O にもっとも近い点は「O から辺 AB におろした垂線の足」であり，その距離は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である。



よって通過領域は 2 つの同心円ではさまれた部分であり，その面積は

$$\pi\cdot1^2-\pi\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\pi\cdots\frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$$

$\boxed{3}$ **【解】**



曲線 C 上の点 (p, q) を，原点 O を中心に $\dfrac{\pi}{4}$ 回転させた点を (x, y) とする。

複素数平面での回転を用いてこれらの座標の関係式を求めると

$$p+qi=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}(x+yi)$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)(x+yi)$$

$$=\frac{x+y}{\sqrt{2}}+\frac{-x+y}{\sqrt{2}}i$$

実部どうし，虚部どうしを比較して

$$p=\frac{x+y}{\sqrt{2}},\ q=\frac{-x+y}{\sqrt{2}}$$

よって，回転後の曲線の方程式は

$$\sqrt{\frac{x+y}{\sqrt{2}}}+\sqrt{\frac{-x+y}{\sqrt{2}}}=1$$

となる。これを同値変形していくと

$$\frac{x+y}{\sqrt{2}}+\sqrt{2(x+y)(-x+y)}+\frac{-x+y}{\sqrt{2}}=1$$

かつ $x+y \geqq 0$ かつ $-x+y \geqq 0$

$\Leftrightarrow\ \sqrt{2(-x^2+y^2)}=1-\sqrt{2}\,y$

かつ $y \geqq -x$ かつ $y \geqq x$

$\Leftrightarrow\ 2(-x^2+y^2)=(1-2y)^2$

かつ $y \geqq -x$ かつ $y \geqq x$ かつ $1-\sqrt{2}\,y \geqq 0$

$\Leftrightarrow\ y=\dfrac{2x^2+1}{2\sqrt{2}}$

かつ $y \geqq -x$ かつ $y \geqq x$ かつ $y \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって，求める図形は

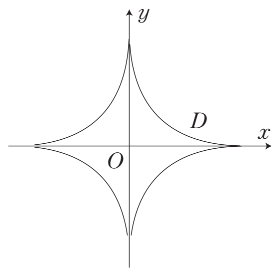
放物線 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x^2+\dfrac{\sqrt{2}}{4} \cdots \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}}{\boxed{\text{ハ}}},\ \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ヒ}}}}{\boxed{\text{フ}}}$

のうち $|x| \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdots \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ヘ}}}}{\boxed{\text{ホ}}}$

をみたす部分。

D で囲まれる面積は，x 軸および y 軸に関する対称性より

「C と x 軸と y 軸で囲まれる部分の面積の 4 倍」である。



C の式を $\sqrt{y}=1-\sqrt{x}$ と変形すると，求める面積は

$$4\int_0^1 y\,dx=4\int_0^1(1-\sqrt{x})^2\,dx$$

$$=4\int_0^1(1-2\sqrt{x}+x)\,dx$$

$$=\left[4x-\frac{16}{3}x\sqrt{x}+2x^2\right]_0^1=\frac{2}{3}\cdots\frac{\boxed{\text{マ}}}{\boxed{\text{ミ}}}$$

接線 ℓ の傾きは -1 であり，その方程式は

$x+y=\dfrac{1}{2}$ である。

D と ℓ の交点のうち第 2 象限にあるものを考えるので

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \cdots ①,\ \ y=\frac{1}{2}-x \cdots ②$$

を連立させて解く。①を変形して

$\sqrt{y}=1-\sqrt{-x}$

$y=(1-\sqrt{-x})^2=1-2\sqrt{-x}-x$

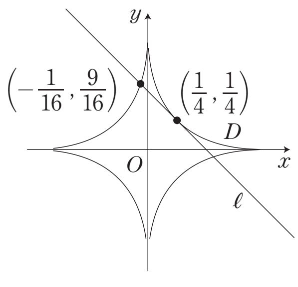
②を代入して

$$\frac{1}{2}-x=1-2\sqrt{-x}-x$$

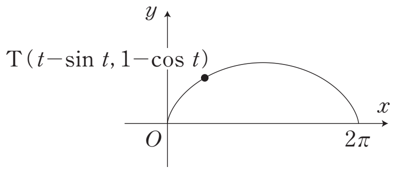
$$2\sqrt{-x}=\frac{1}{2}$$

よって

$$(x, y)=\left(-\frac{1}{16}, \frac{9}{16}\right)\cdots\frac{\boxed{\text{ム}}}{\boxed{\text{メモ}}},\ \frac{\boxed{\text{ヤ}}}{\boxed{\text{ユヨ}}}$$



$\boxed{4}$ **【解】**



$x=t-\sin t$，$y=1-\cos t$ とおく。

$$\frac{dx}{dt}=1-\cos t\geqq 0$$

より，x は t について単調増加である。
また $t=0$ のとき $x=0$，$t=2\pi$ のとき $x=2\pi$ である。
これと $y\geqq 0$ であることより，求める面積は

$$\int_0^{2\pi} y\,dx=\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\frac{dx}{dt}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt$$

$$=\left[\frac{3}{2}t-2\cos t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi}$$

$$=(3\pi-0+0)-(0-0+0)=3\pi\ \ldots\ \boxed{\text{あ}}$$

回転体の体積は

$$\int_0^{2\pi}\pi y^2\,dx=\int_0^{2\pi}\pi(1-\cos t)^2\frac{dx}{dt}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\pi(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\pi\left(1-3\cos t+3\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}-\frac{\cos 3t+3\cos t}{4}\right)dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\pi\left(\frac{3}{2}-\frac{15}{4}\cos t+\frac{3}{2}\cos 2t-\frac{1}{4}\cos 3t\right)dt$$

$$=\pi\left[\frac{3}{2}t-\frac{15}{4}\sin t+\frac{3}{4}\sin 2t-\frac{1}{12}\sin 3t\right]_0^{2\pi}$$

$$=\pi(3\pi-0+0-0)-\pi(0-0+0-0)$$

$$=3\pi^2\ \ldots\ \boxed{\text{い}},\ \boxed{\text{う}}$$

$$\frac{dx}{dt}=1-\cos t,\ \frac{dy}{dt}=\sin t \text{ より}$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=(1-\cos t)^2+\sin^2 t$$

$$=2-2\cos t$$

$$=2-2\left(1-\sin^2\frac{t}{2}\right)=\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^2$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=2\sin\frac{t}{2}\ (\geqq 0)$$

よって弧長は

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}2\sin\frac{t}{2}\,dt=\left[-4\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$=(-4\cos\pi)-(-4\cos 0)=8\ \ldots\ \boxed{\text{え}}$$

8月号では，北里大学医学部と日本大学医学部の数学を攻略しますので，ご期待ください！
全12校の掲載予定は以下のとおりとなっております。

第121回／4月号　東邦大学医学部
第122回／4月号　東京女子医科大学
第123回／6月号　金沢医科大学
第124回／6月号　岩手医科大学
第125回／8月号　北里大学医学部
第126回／8月号　日本大学医学部
第127回／10月号　聖マリアンナ医科大学
第128回／10月号　愛知医科大学
第129回／12月号　東京医科大学
第130回／12月号　杏林大学医学部
第131回／2月号　東京慈恵会医科大学
第132回／2月号　昭和大学医学部