東大螢雪会　医学部数学　攻略演習

マンツーマン指導で医歯薬学部に多くの合格者を輩出している「東大螢雪会」では，主要な私立大学医学部の予想問題を作成しています。このコーナーでは，「東大螢雪会」の作成した予想問題を用いて，主要な私立大学医学部の数学を攻略するための演習を行います。隔月刊で毎号２校分の演習を行い，全12校の連載となる予定です。

今月号２校目は，昭和大学医学部の数学を攻略します！

第120回　昭和大学医学部 編

東大螢雪会講師　上野 尚人

昭和大学医学部は，英語と数学をあわせて制限時間140分の試験が実施され，数学では大問４つが出題されます。すべて答のみを記入する客観式で，大問３と大問４は小問集合です。数学Ｂの出題範囲が全範囲になっており，「期待値」の分野がよく出題されています。今回の予想問題では６割程度の得点を目指してください。

$\boxed{1}$ 次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

座標空間に点 O$(0, 0, 0)$，A$(1, 6, 8)$，B$(2, 4, 9)$，C$(3, 5, 7)$ がある。実数 s, t, u を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

によって点 P を定める。

(1)　s, t, u が

$$s \geqq 0,\ t \geqq 0,\ u \geqq 0,\ s+t+u=1$$

をみたして変化するとき，点 P の描く図形の面積を求めよ。

(2)　点 O から平面 ABC に垂線をおろし，その垂線と平面 ABC との交点を H とする。H の座標を求めよ。

(3)　s, t, u が

$$s \geqq 0,\ t \geqq 0,\ u \geqq 0,\ 1 \leqq s+t+u \leqq 2$$

をみたして変化するとき，点 P の描く図形の体積を求めよ。

$\boxed{2}$ 次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

１から30までの整数が書かれたカードを１枚ずつ，全部で30枚用意する。この30枚のカードを手元におき，以下の (A)，(B)，(C) の順で３つの箱 A, B, C に分けて入れる。

(A)　「30 以下の素数」が書かれたカードをすべて箱 A に入れる。

(B)　手元に残ったカードのうち「偶数」のカードをすべて箱 B に入れる。

(C)　手元に残ったカードをすべて箱 C に入れる。

そして，X と Y の２人が以下の (i)，(ii) の順で１つずつのカードを選ぶ。

(i)　X は箱 A, B, C のひとつを選び，選んだ箱の中から 1 枚のカードを引く。

(ii)　X が 1 枚のカードを引いたあと，Y は箱 A, B, C のひとつを選び，選んだ箱の中から 1 枚のカードを引く。（Y は，X がどの箱からカードを引いたかという情報を知っているうえで箱を選ぶことができる）

X が引いたカードに書かれた整数を x，Y が引いたカードに書かれた整数を y とする。

(1)　手順(A)，(B)，(C) が終わった直後に箱 A の中に入っているカードの枚数を $n(A)$ のように表す。このとき，$n(A)$，$n(B)$，$n(C)$ の値を求めよ。

(2)　X が手順(i)で箱 A を選んでから 1 枚のカードを引き，つぎに Y が手順(ii)で箱 A を選んでから 1 枚のカードを引く。このとき $|x-y|=1$ となる確率を求めよ。

(3)　$|x-y|=1$ となる確率を P とする。

(a)　X が手順(i)で箱 A を選んでから 1 枚のカードを引いたとき，確率 P の値を最大にするには Y は A, B, C どの箱を選ぶのがよいか。

(b)　X が手順(i)で箱 B を選んでから 1 枚のカードを引いたとき，確率 P の値を最大にするには Y は A, B, C どの箱を選ぶのがよいか。

(c)　X が手順(i)で箱 C を選んでから 1 枚のカードを引いたとき，確率 P の値を最大にするには Y は A, B, C どの箱を選ぶのがよいか。

$\boxed{3}$　次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　${}_{2020}\mathrm{C}_{1010}$ の値を 2 進法で表記したとき，末尾に数字 0 は連続して何桁並ぶか。10進法で答えよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1=1,\ na_{n+1}=(n+2)a_n+1\ (n=1, 2, 3, \dots)$$

をみたす。このとき，数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ の値を n で表せ。

(3)　1 個のサイコロを投げて，出た目を記録する試行を繰り返す。ただし 6 の目が出たらその回で試行を終える。X 回目の試行で終了した場合の得点を X とする。また試行回数の上限 n をあらかじめ決めておき，n 回の試行を終えても 6 の目が一度も出ない場合は得点を 0 とする。得点 X の期待値 $E(X)$ を n で表せ。

$\boxed{4}$　次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　座標平面上に，実数 t を用いて

$$x=1-t^2,\ y=t-t^3$$

で表される点 $\mathrm{P}(x, y)$ があり，t がすべての実数値をとって変化するときに点 P が描く図形を F とする。図形 F のうち閉曲線となっている部分で囲まれた面積を求めよ。

(2)　実数 x, y が $x^2+y^2=1,\ y\geqq 0$ をみたすとき，x^3+y^3 のとり得る範囲を求めよ。

$\boxed{1}$　**【解】**

(1)　点 P が描く図形は三角形 ABC の周および内部である。

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1, -2, 1),\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(2, -1, -1)$$

なので求める面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{6\cdot 6-3^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\ \cdots\cdots\ (\text{答})$$

(2)　点 H は平面 ABC 上の点なので，実数 x, y を用いて

$$\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$$

と表される。この式を変形して

$$\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$$

ここで，$OH\perp AB$ かつ $OH\perp AC$ なので

$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$$
$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}+x\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+y\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$$
$$-3+6x+3y=0\quad\therefore 2x+y=1\ \cdots①$$
$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$$
$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}+x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+y\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=0$$
$$-12+3x+6y=0\quad\therefore x+2y=4\ \cdots②$$

①，②を解いて $x=-\dfrac{2}{3},\ \ y=\dfrac{7}{3}$

H の座標は $\overrightarrow{OH}$ の成分と一致する。

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{7}{3}\overrightarrow{AC}$$
$$=(5,5,5)\ \cdots\cdots(答)$$

(3)　$\overrightarrow{OX}=2\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OY}=2\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OZ}=2\overrightarrow{OC}$

をみたす点 X, Y, Z をとる。

$s+t+u=2$ のとき点 P の軌跡は平面 XYZ となり，与えられた連立不等式のもとでの点 P の描く図形は三角錐台 ABC-XYZ（三角錐 O-XYZ から三角錐 O-ABC を除いたもの）となる。2 つの三角錐の相似比は 1:2 であり，三角錐 O-XYZ の体積は三角錐 O-ABC の体積の 8 倍なので求める体積は三角錐 O-ABC の体積の 7 倍である。

ここで (2) で求めた点 H に対して

$$OH=\sqrt{5^2+5^2+5^2}=5\sqrt{3}$$

となるので，三角錐 O-ABC の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\triangle ABC\cdot OH=\frac{15}{2}\ \cdots\cdots(答)$$

$\boxed{2}$ 【解】

(1)　箱 A, B, C に入っているカードの内訳を集合のように表すと

$$A=\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29\}$$
$$B=\{4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30\}$$
$$C=\{1,9,15,21,25,27\}$$

となる。よって

$$n(A)=10,\ n(B)=14,\ n(C)=6\ \cdots\cdots(答)$$

(2)　X, Y が 2 人とも A の箱からカードを引いて $|x-y|=1$ となるのは

$$x,y=(2,3),(3,2)$$

のとき。よってその確率は

$$\frac{2}{10\cdot 9}=\frac{1}{45}\ \cdots\cdots(答)$$

(3)(a)　X が A の箱を選び，Y が A の箱を選んだときは $P=\dfrac{1}{45}$

X が A の箱を選び，Y が B の箱を選んだとき $|x-y|=1$ となるのは

- $x=3$ のとき
  $y=4$ に限られる。
- x が 5 から29までの素数（8 個いずれか）のとき y は x の前後いずれかの偶数である。

よってこのときの確率 P の値は

$$P=\frac{1+8\cdot 2}{10\cdot 14}=\frac{17}{140}$$

X が A の箱を選び，Y が C の箱を選んだとき $|x-y|=1$ となるのは $(x,y)=(2,1)$ のときのみ。よってこのとき

$$P=\frac{1}{14\cdot 6}=\frac{1}{84}$$

以上より，P の値が最大となるのは B の箱を選んだとき ……(答)

(b)　X が B の箱を選び，Y が A の箱を選んだときは (a) と同様に

$$P=\frac{17}{140}=\frac{51}{420}$$

X が B の箱を選び，Y が B の箱を選んだときは $P=0$

X が B の箱を選び，Y が C の箱を選んだときに $|x-y|=1$ となるのは y が 1 以外の奇数（5 個いずれか）で，x がその前後いずれかの偶数となるときなので

$$P=\frac{5\cdot 2}{14\cdot 6}=\frac{5}{42}=\frac{50}{420}$$

以上より，P の値が最大となるのは A の箱を選んだとき ……(答)

(c)　X が C の箱を選び，Y が A の箱を選んだときは(a)と同様に

$$P=\frac{1}{84}$$

X が C の箱を選び，Y が B の箱を選んだときは(a)と同様に

$$P=\frac{5}{42}=\frac{10}{84}$$

X が C の箱を選び，Y が C の箱を選んだときは $P=0$

以上より，P の値が最大となるのは B の箱を選んだとき ……(答)

$\boxed{3}$ 【解】

(1)

$$_{2020}\mathrm{C}_{1010}=\frac{2020!}{1010!\cdot 1010!}$$

ここで，2020! および 1010! を素因数分解したときに現れる素因数 2 の個数を求める。

$2020\div 2=1010$，$1010\div 2=505$

$505\div 2=252\ \ldots\ 1$，$252\div 2=126$

$126\div 2=63$，$63\div 2=31\ \ldots\ 1$

$31\div 2=15\ \ldots\ 1$，$15\div 2=7\ \ldots\ 1$

$7\div 2=3\ \ldots\ 1$，$3\div 2=1\ \ldots\ 1$

よって，2020! に含まれる素因数 2 の個数は

$$1010+505+252+126+63+31+15+7+3+1=2013$$

であり，1010! に含まれる素因数 2 の個数は

$$505+252+126+63+31+15+7+3+1=1003$$

よって，$_{2020}\mathrm{C}_{1010}$ に含まれる素因数 2 の個数は

$$2013-(1003+1003)=7$$

であり

$$_{2020}\mathrm{C}_{1010}=2^7\cdot a\ \ (a\text{ は奇数})$$

と表される。これを 2 進法に直すと，末尾に連続して並ぶ 0 の個数は

7 ……(答)

(2)　与えられた漸化式の両辺を

$$n(n+1)(n+2)(\neq 0)$$

で割って

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)}=\frac{a_n}{n(n+1)}+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$b_n=\dfrac{a_n}{n(n+1)}$ とおき，部分分数分解などの変形を行うと

$$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right\}$$

$$b_{n+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=b_n+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n(n+1)}$$

よって $b_n+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n(n+1)}$ は定数の列であり，その値は

$$b_1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{a_1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

に等しい。よって任意の n に対して

$$b_n+\frac{1}{2}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{a_n}{n(n+1)}+\frac{1}{2}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{3}{4}$$

が成立。両辺に $n(n+1)$ をかけて整理すると

$$a_n=\frac{3}{4}n(n+1)-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{4}(3n^2+3n-2)\ \text{……(答)}$$

(3)　$X=k\ (k=0, 1, 2, \ldots, n)$ となる確率を $P(k)$ とおくと

$$P(0)=\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$P(k)=\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{6}\ (k=1, 2, \ldots, N)$$

である。求める期待値は

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n}k\cdot P(k)=\sum_{k=1}^{n}k\cdot P(k)$$

$$=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}k\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$$

である。ここで $S=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$ とおくと

$$S=1\cdot 1+2\cdot\frac{5}{6}+\cdots+n\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

$$\frac{5}{6}S=1\cdot\frac{5}{6}+2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2+\cdots+n\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

差をとって

$$\frac{1}{6}S=1\cdot 1+1\cdot\frac{5}{6}+1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2+\cdots$$
$$+1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}-n\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n$$
$$=1\cdot\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1-\frac{5}{6}}-n\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n$$
$$=6\cdot\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}-n\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

よって

$$E(X)=\frac{1}{6}S=6-(n+6)\left(\frac{5}{6}\right)^n\ \cdots\cdots㊧$$

$\boxed{4}$ 【解】

(1)　異なる2つの t の値 $t=a, b$ において点Pが同じ点を表したとする。

$$1-a^2=1-b^2\ \cdots①,\quad a-a^3=b-b^3\ \cdots②$$

①より $a^2=b^2$ であり，$a\neq b$ より $b=-a\,(\neq 0)$ である。

$b=-a$ を②に代入して

$$a-a^3=-a-(-a^3)$$
$$2a^3-2a=0$$
$$2a(a+1)(a-1)=0$$

$a\neq 0$ より $a=\pm 1$ であり，$t=\pm 1$ においてPは同じ点となる。

以降，$-1\leqq t\leqq 1$ における点Pの動きを考える。

$x(t)=1-t^2$ は t の偶関数，$y(t)=t-t^3$ は t の奇関数である。

よって $0\leqq t\leqq 1$ における点Pの動きを考えれば，この軌跡を x 軸に関して線対称に移動させることで求める閉曲線が得られる。

$t=0$ のとき $\mathrm{P}(1, 0)$，$t=1$ のとき $\mathrm{P}(0, 0)$ である。

$$\frac{dx}{dt}=-2t\,(\leqq 0)$$

なので $0\leqq t\leqq 1$ において x は単調減少。

また $y(t)=t(1-t)(1+t)\geqq 0$ なのでこの区間において $y\geqq 0$ である。

対称性により，求める面積は

$$2\int_0^1 y\,dx=2\int_1^0(t-t^3)\cdot\frac{dx}{dt}\cdot dt$$
$$=2\int_1^0(t-t^3)(-2t)\,dt$$
$$=4\int_0^1(t^2-t^4)\,dt=4\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right]_0^1$$
$$=4\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{8}{15}\ \cdots\cdots㊧$$

(2)　$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta\,(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とおく。

$\cos\theta+\sin\theta=t$ とする。

$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ であり，

$$\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{5}{4}\pi$$

より

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$$

よって $-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$ である。また

$$t^2=(\cos\theta+\sin\theta)^2=1+2\cos\theta\sin\theta$$

より

$$\cos\theta\sin\theta=\frac{t^2-1}{2}$$

ここで

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2+y^2-xy)$$
$$=(\cos\theta+\sin\theta)(1-\cos\theta\sin\theta)$$
$$=t\cdot\left(1-\frac{t^2-1}{2}\right)=-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t$$

よって，$-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$ における，t の関数 $f(t)=-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t$ のとり得る値の範囲を求めればよい。

$$f'(t)=-\frac{3}{2}t^2+\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}(t+1)(t-1)$$

ここで $f(-1)=-1$，$f(\sqrt{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}$ より $f(t)$ の増減表は下のようになる。

t	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$f'(t)$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗	極大	↘	

これと

$$f(-1)=-1,\ f(1)=1,\ f(\sqrt{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

より，求める範囲は

$$-1 \leqq x^3+y^3 \leqq 1 \cdots\cdots(答)$$

【受験生へのアドバイス】

本学医学部では数学Ｂの出題範囲に「統計的な推測の分野を除く」というただし書きがなく，現課程になってからも数学Ｂの分野にあたる「期待値」の範囲から出題された年があります。数学Ｂ「統計的な推測」分野からの出題があるのは本学医学部以外に

・慶應義塾大学（総合政策学部，環境情報学部で必須問題）
・滋賀大学（データサイエンス学部で選択問題）
・鹿児島大学（教育学部で選択問題）

などがあります。対策としては

・大学入試センター試験『数学Ⅱ・数学Ｂ』第５問の利用
・旧課程（2014年度以前）の入試問題の利用

などがあります。期待値自体は難しい概念ではないので，数学Ⅰ「データの分析」で学ぶ分散・標準偏差といった言葉との融合問題にも慣れておきましょう。

４月号では，東邦大学医学部と東京女子医科大学の数学を攻略しますので，ご期待ください！
全12校の掲載予定は以下のとおりとなっております。

第121回／４月号　東邦大学医学部
第122回／４月号　東京女子医科大学
第123回／６月号　金沢医科大学
第124回／６月号　岩手医科大学
第125回／８月号　北里大学医学部
第126回／８月号　日本大学医学部
第127回／10月号　聖マリアンナ医科大学
第128回／10月号　愛知医科大学
第129回／12月号　東京医科大学
第130回／12月号　杏林大学医学部
第131回／２月号　東京慈恵会医科大学
第132回／２月号　昭和大学医学部