マンツーマン指導で医歯薬学部に多くの合格者を輩出している「東大螢雪会」では，主要な私立大学医学部の予想問題を作成しています。このコーナーでは，「東大螢雪会」の作成した予想問題を用いて，主要な私立大学医学部の数学を攻略するための演習を行います。隔月刊で毎号２校分の演習を行い，全12校の連載となる予定です。

今月号１校目は，東京慈恵会医科大学の数学を攻略します！

第119回　東京慈恵会医科大学 編

東大螢雪会講師　上野 尚人

東京慈恵会医科大学の数学は，制限時間90分で大問４つが出題されます。大問１は答のみを記入する客観式，大問２から大問４は記述式です。今回の予想問題では６割程度の得点を目指してください。

1　次の $\boxed{}$ にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ。

(1)　４個のさいころを同時に投げたときに出た目の最大値を M，最小値を m とする。$M-m=2$ となる確率は $\boxed{(ア)}$ であり，M が m で割り切れない確率は $\boxed{(イ)}$ である。ただしさいころはすべて独立で，１から６までの整数の目が等確率で出るものとする。

(2)　n は２以上の整数，r は $0 \leqq r \leqq n-2$ をみたす整数である。３つの二項係数 ${}_n\mathrm{C}_r$，${}_n\mathrm{C}_{r+1}$，${}_n\mathrm{C}_{r+2}$ がこの順に公差が正の等差数列をなしている。このような整数 (n, r) の組合せのうち n の値が最も小さいものは $(n, r)=\boxed{(ウ)}$ であり，n の値が２番目に小さいものは $(n, r)=\boxed{(エ)}$ である。

2　１辺の長さが２の正八面体 P を考える。

(1)　P の向かい合う２つの面（互いに辺や頂点を共有しない２つの面）の距離を求めよ。

(2)　P の１つの辺を回転軸にして１回転させたときの通過部分の体積を求めよ。ただし正八面体 P は面のみでありその内部は含まないものとする。

3　３辺の長さがすべて１桁の整数であり，３つの内角の大きさが等差数列をなしているような三角形の３辺の長さの組をすべて求めよ。ただしこの三角形は正三角形ではないとする。

4

(1)　a は正の数，α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ をみたす数とする。平面上の極座標 (r, θ) に関する条件

$$0 \leqq r \leqq a,\ 0 \leqq \theta \leqq \alpha$$

で表された図形を始線（$\theta=0$ で表される直線）の周りに１回転させて得られる立体の体積 U を a, α で表せ。また $\dfrac{dU}{d\alpha}$ を求めよ。

(2)　極方程式 $r=f(\theta)$（$0 \leqq \theta \leqq \alpha$，$f(\theta)$ は正の値をとる連続関数）で表される曲線を C，直線 $l:\theta=0$

（始線），直線 $m:\theta=\alpha$ とする。C, l, m で囲まれる図形を l の周りに1回転させて得られる立体の体積を V とする。(1)の結果を用いて $\dfrac{dV}{d\alpha}$ を $\alpha, f(\alpha)$ で表せ。

(3) 極方程式 $r^3=\cos^2\theta\ \left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}\right)$ で表される曲線を C，直線 $l\theta=0$（始線），直線 $m:\theta=\dfrac{\pi}{3}$ とする。C, l, m で囲まれる図形を l の周りに1回転させて得られる立体の体積 W を求めよ。

---

1 【解】

(1) まず，4つのさいころの目の最小値が a，最大値が b となる確率を求める。$(1\leqq a<b\leqq 6)$

4つのさいころをすべて区別すると目の出方は全部で 6^4 通りであり，これらの確率は等しい。

すべての目が a 以上 b 以下であるような出方は $(b-a+1)^4$ 通り

すべての目が a 以上 $b-1$ 以下であるような出方は $(b-a)^4$ 通り

すべての目が $a+1$ 以上 b 以下であるような出方は $(b-a)^4$ 通り

すべての目が $a+1$ 以上 $b-1$ 以下であるような出方は $(b-a-1)^4$ 通り

よって，最小の目が a でかつ最大の目が b となる出方は

$$\begin{aligned}&(b-a+1)^4-\{(b-a)^4+(b-a)^4-(b-a-1)^4\}\\&=\{(b-a+1)^4-(b-a-1)^4\}-2(b-a)^4\\&=2\{(b-a)^4+6(b-a)^2+1\}-2(b-a)^4\\&=12(b-a)^2+2\end{aligned}$$

（この式は $b-a=1$ のときも正しい。ただし $b-a=0$ のときは1通り）

よって $M-m=2$ となるのは，

$(a, b)=(1,3),(2,4),(3,5),(4,6)$ のいずれかとなる場合なのでその確率は

$$\frac{(12\cdot 2^2+2)\cdot 4}{6^4}=\frac{25}{162}\cdots\boxed{（ア）}$$

次に M が m で割り切れないのは，$M-m$ の値で分けていくと

- $M-m=1$ のとき
  $(a, b)=(2,3),(3,4),(4,5),(5,6)$ のときなので目の出方は $(12\cdot 1^2+2)\cdot 4=56$ 通り
- $M-m=2$ のとき $(a, b)=(3,5),(4,6)$ のいずれかとなるときなので目の出方は全部で $(12\cdot 2^2+2)\cdot 2=100$ 通り
- $M-m=3$ のとき $(a, b)=(2,5)$ のときなので目の出方は $12\cdot 3^2+2=110$ 通り

以上より，求める確率は

$$\frac{56+100+110}{6^4}=\frac{266}{6^4}=\frac{133}{648}\cdots\cdots(答)$$

(2) まず3つの数が等差数列をなす条件を考える。

$${}_nC_r+{}_nC_{r+2}=2{}_nC_{r+1}$$

$$\frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}+\frac{n!}{(r+2)!\cdot(n-r-2)!}=2\cdot\frac{n!}{(r+1)!\cdot(n-r-1)!}$$

両辺に $\dfrac{(r+2)!\cdot(n-r)!}{n!}$ をかけて

$$(r+2)(r+1)+(n-r)(n-r-1)=2(r+2)(n-r)$$

$$4r^2+(-4n+8)r+(n^2-5n+2)=0\cdots①$$

(*) を r の2次方程式とみて解くと

$$r=\frac{(2n-4)\pm\sqrt{(-2n+4)^2-4(n^2-5n+2)}}{4}$$

$$=\frac{(n-2)\pm\sqrt{n+2}}{2}\cdots②$$

n, r がともに整数であるためには $n+2$ が整数の平方であることが必要。よって $n+2=4, 9, 16, \ldots$ より $n=2, 7, 14, \ldots$ が候補となる。

- $n=2$ のとき②より $r=\dfrac{0\pm 2}{2}=1$ だが，
  $0\leqq r\leqq n-2$ を満たさない。
- $n=7$ のとき②より $r=\dfrac{5\pm 3}{2}=1, 4$
  $(n, r)=(7,1)$ のとき二項係数の値は順に
  ${}_7C_1=7,\ {}_7C_2=21,\ {}_7C_3=35$
  となり題意を満たす。$(n, r)=(7,4)$ のときは
  ${}_7C_4=35,\ {}_7C_5=21,\ {}_7C_6=7$

となり，公差が負なので題意を満たさない。

- $n=14$ のとき②より $r=\dfrac{12\pm4}{2}=4,8$

$(n,r)=(14,4)$ のとき二項係数の値は順に

${}_{14}C_4=1001,\ {}_{14}C_5=2002,\ {}_{14}C_6=3003$

となり題意を満たす。$(n,r)=(14,8)$ のときは

${}_{14}C_8=3003,\ {}_{14}C_9=2002,\ {}_{14}C_{10}=1001$

となり，公差が負なので題意を満たさない。

以上より，n が最も小さい組は

$(n,r)=(7,1)$ ……(答)

n が2番目に小さい組は

$(n,r)=(14,4)$ ……(答)

$\boxed{2}$ **【解】**

(1) 正八面体 P の表面積は，1辺が2の正三角形8個なので

$$\left(\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot8=8\sqrt{3}$$

P の体積は，1辺が2の正方形を底面として高さを $\sqrt{2}$ とする正四角錐2個ぶんなので

$$\left(\frac{1}{3}\cdot2^2\cdot\sqrt{2}\right)\cdot2=\frac{8\sqrt{2}}{3}$$

P は正多面体なので内接球をもつ。その半径を r とすると

$$\frac{1}{3}\cdot8\sqrt{3}\cdot r=\frac{8\sqrt{2}}{3}$$

$$r=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

よって求める距離は

$$2r=\frac{2\sqrt{6}}{3}\ \text{……(答)}$$

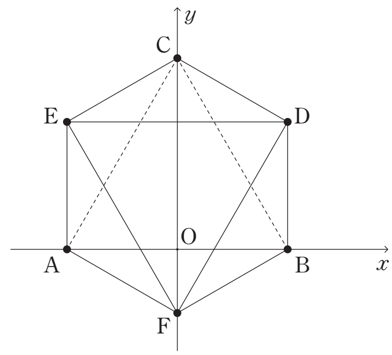
(2) 正八面体 P の各頂点を

$A(-1,0,0),\ B(1,0,0),\ C(0,\sqrt{3},0)$

$D\left(1,\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right),\ E\left(-1,\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right),$

$F\left(0,-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$

とおき，辺AB（x 軸）を中心に1回転させて得られる回転体を考える。



図形の対称性より，平面 $x=t\ (0\leqq t\leqq1)$ による断面を考えればよい。

平面 $x=t$ と，正八面体 P の各辺との交点の座標を求めておく。

辺ABとの交点は $Q(t,0,0)$

辺BCとの交点は $R(t,\sqrt{3}(1-t),0)$

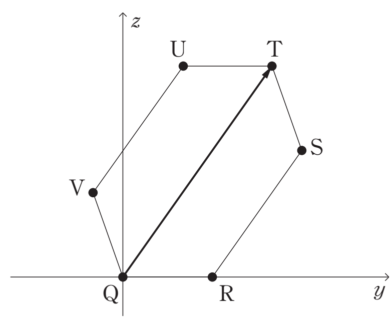
辺CDとの交点は $S\left(t,\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}t,\dfrac{2\sqrt{6}}{3}t\right)$

辺DEとの交点は $T\left(t,\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$

辺DFとの交点は $U\left(t,-\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}t,\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$

辺BFとの交点は

$$V\left(t,-\frac{\sqrt{3}}{3}(1-t),\frac{2\sqrt{6}}{3}(1-t)\right)$$



平面 $x=t$ 上で，点Qを中心に六角形QRSTUV（周のみで内部を含まない）を1回転させて得られる図形は，線分QTを1回転させて得られる円（周および内部）である。この円の半径は

$$QT=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2}=2$$

よって得られる回転体は，半径2の円を底面に

もつ高さ2の円柱なのでその体積は

$$\pi\cdot 2^2\cdot 2=8\pi \cdots\cdots(答)$$

$\boxed{3}$ 【解】

この三角形の3つの内角の大きさを A, B, C $(A\leqq B\leqq C)$ とする。等差数列をなすので $A+C=2B$ が成立。ここで $A+B+C=\pi$ より $\pi-B=2B$ なので $B=\dfrac{\pi}{3}$ である。

A, B, C のうち2つが等しい場合，その2つの角はいずれも大きさ $\dfrac{\pi}{3}$ となり正三角形になるため不適。よって3つの内角の大きさはすべて異なる。角の大きさの大小関係は $A<B<C$ となる。A の対辺を a，B の対辺を b，C の対辺を c とすると $a<b<c$ が成立。余弦定理より

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\frac{\pi}{3}$$

$$b^2=a^2+c^2-ac$$

この等式を満たす1から9までの正の整数 a, b, c $(1\leqq a<b<c\leqq 9)$ をすべて求める。

(∗) を a の2次方程式とみて解くと

$$a^2-ca+(c^2-b^2)=0$$

$$a=\frac{c\pm\sqrt{-3c^2+4b^2}}{2}$$

$2\leqq b<c\leqq 9$ をみたし，$-3c^2+4b^2$ が整数の平方となる組合せは

$$(b, c)=(7, 8)$$

のみである。このとき (∗) は

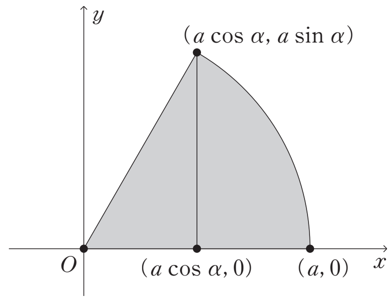
$$49=a^2+64-8a$$

となり，これを解くと $a=3, 5$ これはいずれも題意を満たす。よって求める3辺の長さは

$$(3, 7, 8), (5, 7, 8)\cdots\cdots(答)$$

$\boxed{4}$ 【解】

(1) 求めるものは，半径 a，中心角 α の扇形を1回転させて得られる立体の体積である。
直交座標系（xy 平面）に直すと，半円 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ の円弧の一部，x 軸，直線 $y=x\tan\alpha$ で囲まれた図形を x 軸中心に1回転させて得られる立体である。



$0\leqq x\leqq a\cos\alpha$ の部分（円錐）と $a\cos\alpha\leqq x\leqq a$ の部分（球の一部）に分けて求めると

$$U=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot(a\sin\alpha)^2\cdot a\cos\alpha$$

$$+\int_a^{a\cos\alpha}\pi(a^2-x^2)\,dx$$

$$=\frac{\pi}{3}a^3\sin^2\alpha\cos\alpha+\pi\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{a\cos\alpha}^{a}$$

$$=\frac{\pi}{3}a^3\sin^2\alpha\cos\alpha+\pi\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right)$$

$$-\pi\left(a^3\cos\alpha-\frac{a^3}{3}\cos^3\alpha\right)$$

$$=\frac{\pi}{3}a^3\sin^2\alpha\cos\alpha+\frac{\pi}{3}a^3\cos^3\alpha$$

$$+\frac{2}{3}\pi a^3-\pi a^3\cos\alpha$$

$$=\frac{\pi}{3}a^3\cos\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$$

$$-\pi a^3\cos\alpha+\frac{2}{3}\pi a^3$$

$$=\frac{\pi}{3}a^3\cos\alpha-\pi a^3\cos\alpha+\frac{2}{3}\pi a^3$$

$$=\frac{2}{3}\pi a^3(1-\cos\alpha)\cdots\cdots(答)$$

$$\frac{dU}{d\alpha}=\frac{2}{3}\pi a^3\sin\alpha\cdots\cdots(答)$$

(2) (1)で得られた結果より，V の微小変化量 $\dfrac{dV}{d\alpha}$ についても同様に

$$\frac{dV}{d\alpha}=\frac{2}{3}\pi\{f(\alpha)\}^3\sin\alpha\cdots\cdots(答)$$

(3)　(2)の結果より

$$\frac{dW}{d\theta}=\frac{2}{3}\pi\{f(\theta)\}^3\sin\theta$$

とわかる。$\{f(\theta)\}^3=r^3=\cos^2\theta$ より求める体積は

$$\begin{aligned}W&=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{2}{3}\pi\cos^2\theta\sin\theta d\theta\\&=\frac{2}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}(-\cos^2\theta)(\cos\theta)'\,d\theta\\&=\frac{2}{3}\pi\left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}\\&=\frac{2}{3}\pi\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3-1^3\right)\\&=-\frac{2}{9}\pi\cdot\left(-\frac{7}{8}\right)=\frac{7}{36}\pi\ \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

4月号では，東邦大学医学部と東京女子医科大学の数学を攻略しますので，ご期待ください！

全12校の掲載予定は以下のとおりとなっております。

第121回／4月号　東邦大学医学部
第122回／4月号　東京女子医科大学
第123回／6月号　金沢医科大学
第124回／6月号　岩手医科大学
第125回／8月号　北里大学医学部
第126回／8月号　日本大学医学部
第127回／10月号　聖マリアンナ医科大学
第128回／10月号　愛知医科大学
第129回／12月号　東京医科大学
第130回／12月号　杏林大学医学部
第131回／2月号　東京慈恵会医科大学
第132回／2月号　昭和大学医学部