東大螢雪会 医学部数学 攻略演習

マンツーマン指導で医歯薬学部に多くの合格者を輩出している「東大螢雪会」では，主要な私立大学医学部の予想問題を作成しています。このコーナーでは，「東大螢雪会」の作成した予想問題を用いて，主要な私立大学医学部の数学を攻略するための演習を行います。隔月刊で毎号２校分の演習を行い，全12校の連載となる予定です。

今月号２校目は，杏林大学医学部の数学を攻略します！

第118回　杏林大学医学部 編

東大螢雪会講師　上野 尚人

杏林大学医学部の数学は，制限時間60分で大問４つが出題されます。すべてマークセンス式です。今回の予想問題では７割程度の得点を目指してください。

$\boxed{1}$　AとBの２人のプレイヤーがゲームで対戦をする。１回の対戦でAが勝つ確率を $x\ (0<x<1)$，Bが勝つ確率を $1-x$ とし，引き分けはないものとする。このゲームを連続して対戦し，先に３勝したほうを優勝とする。

(a)　Aが優勝する確率を x の関数 $f(x)$ と表すと $f(x)=\boxed{\text{ア}}\,x^5-\boxed{\text{イウ}}\,x^4+\boxed{\text{エオ}}\,x^3$ である。$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$ であることから，$x=\dfrac{1}{2}$ のときはAとBの優勝確率が等しいことが確認できる。

(b)　x の値が $\dfrac{1}{2}$ から少しずれた場合に優勝確率がどの程度変化するかを考察する。$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ であることから，xy 平面上の曲線 $C: y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ における接線の方程式は

$l: y=\dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}x-\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ となる。この接線 l の方程式を $y=g(x)$ と表すことにすると，x の値が $\dfrac{1}{2}$ に近いとき $f(x)$ の値は $g(x)$ で近似できる。$x=\dfrac{1}{2}+\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{1}{2}\right)$ のとき

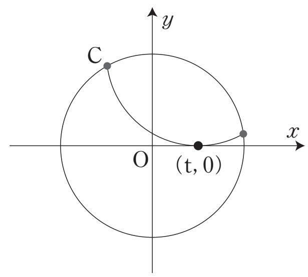
$g\left(\dfrac{1}{2}+\alpha\right)=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}}\alpha\right)$ である。

(c)　α が微小量のとき，Aが優勝する確率 $P(A)$ を $g\left(\dfrac{1}{2}+\alpha\right)$，Bが優勝する確率 $P(B)$ を $1-g\left(\dfrac{1}{2}+\alpha\right)$ で近似できる。微小量 t に対して適用できる近似式 $(1-t)^{-1}\fallingdotseq 1+t$ を用いて，AとBの優勝する確

率の比率 $\dfrac{P(A)}{P(B)}$ を α の1次式で近似する（α の2乗の項を無視する）とその値は $1+\dfrac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チ}}}\alpha$ となり，α の微小な変化に対して優勝する確率の比率は大きく変化することがわかる。

$\boxed{2}$ xy 平面上に円 $C:x^2+y^2=1$ がある。この円周の $y\geqq 0$ の一部を直線 l に関して折り返して，折り返した部分が x 軸と点 $(t,0)\,(-1<t<1)$ で接するようにする。

(a) 折り返したあとの円弧は，半径が $\boxed{\text{ア}}$，中心の座標が $\left(t,\ \boxed{\text{イ}}\right)$ であるような円 D の一部である。



(b) 円 C の方程式と円 D の方程式から，折り返しの対称軸となる直線 l の方程式は $\boxed{\text{ウ}}\,tx+\boxed{\text{エ}}\,y=t^2+\boxed{\text{オ}}$ とわかる。

(c) 直線 l の方程式を t の2次方程式とみて，実数解をもつ条件を考えると x,y の不等式 $x^2+\boxed{\text{カ}}\,y-\boxed{\text{キ}}\geqq 0$ が得られる。この不等式が表す領域の境界線は放物線であり，直線 l は t の値にかかわらずこの放物線に接することがわかる。このことから，直線 l の通過領域のうち円 C の内部にある部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\pi-\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ とわかる。

$\boxed{3}$ 方程式 $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=3\cdots(*)$ で表される立体 P について考える。

(a) 点 $\mathrm{O}(0,0,0)$，$\mathrm{A}(1,1,1)$，$\mathrm{T}(t,t,t)\ (t\geqq 0)$ をとり，点 T を通り OA に垂直な平面 α を考える。この平面 α の方程式は $x+y+z=\boxed{\text{ア}}\,t\cdots$① と表され，①の両辺を2乗したものと $(*)$ を左辺どうし，右辺どうし加えることによって $x^2+y^2+z^2=\boxed{\text{イ}}+\boxed{\text{ウ}}\,t^2\cdots$② が得られる。

(b) ②が表す球面を S とすると，S と α の交わりは，中心が点 T で半径が一定の値 $\boxed{\text{エ}}$ であるような円を表す。この円は立体 P と平面 α の交わりでもある。よって立体 P は直線 OA を軸とする円柱を表すことがわかる。

(c) とくに $t=2\sqrt{2}$ のとき，立体 P の内部かつ球面 S の内部が表す立体の体積は

$$\pi\left(\frac{\boxed{\text{オカキ}}}{\boxed{\text{ク}}}-\boxed{\text{ケコ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}\right)$$ である。

$\boxed{4}$ i を虚数単位とし，$\alpha=3+4i$ とする。複素数 $\alpha^n\ (n=1,2,3,\ldots)$ の実部を a_n，虚部を b_n とする。

(a) 2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ に対して漸化式

$$a_{n+1}=\boxed{\text{ア}}\,a_n-\boxed{\text{イ}}\,b_n\cdots①$$
$$b_{n+1}=\boxed{\text{ウ}}\,a_n+\boxed{\text{エ}}\,b_n\cdots②$$

が成立する。また

$$a_n{}^2+b_n{}^2=\boxed{\text{オ}}^{2n}\cdots③$$

である。

(b)　①，②から $\{b_n\}$ を消去することにより，数列 $\{a_n\}$ の隣接 3 項間漸化式

$$a_{n+2}=\boxed{\text{カ}}\,a_{n+1}-\boxed{\text{キク}}\,a_n\cdots④$$

が得られる。

(c)　$a_1=\boxed{\text{ケ}}$，$a_2=-\boxed{\text{コ}}$

および漸化式④より，数列 $\{a_n\}$ の項はすべて整数である。整数 $\{a_n\}$ を $\boxed{\text{オ}}$ で割ったときの余りは n の値にかかわらずつねに $\boxed{\text{サ}}$ である。

数列 $\{b_n\}$ の項もすべて整数なので，これと式③より $\{b_n\}$ を $\boxed{\text{オ}}$ で割ったときの余りについての情報がわかる。このことから α^n が実数にならないことがわかる。

---

1 【解】

(a)　3 対戦目で A が優勝するのは，A が 3 回連続で勝つとき。その確率は x^3

4 対戦目で A が優勝するのは，3 対戦目で A が 2 勝 1 敗となり 4 対戦目で A が勝つとき。その確率は

$${}_3\mathrm{C}_2x^2(1-x)\cdot x$$

5 対戦目で A が優勝するのは，4 対戦目で A が 2 勝 2 敗となり 5 対戦目で A が勝つとき。その確率は

$${}_4\mathrm{C}_2x^2(1-x)^2\cdot x$$

これらは互いに排反ですべての場合をつくしている。よって

$$\begin{aligned}f(x)&=x^3+3(x^3-x^4)+6(x^3-2x^4+x^5)\\&=6x^5-15x^4+10x^3\end{aligned}$$

$$\cdots\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イウ}},\ \boxed{\text{エオ}}$$

(b)　
$$\begin{aligned}f'(x)&=30x^4-60x^3+30x^2\\&=30x^2(x-1)^2\end{aligned}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=30\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{15}{8}\cdots\frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

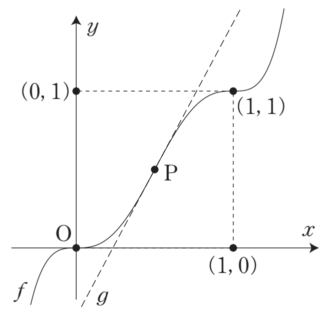
よって，曲線 C 上の点 P における接線の方程式は

$$y-\frac{1}{2}=\frac{15}{8}\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$y=\frac{15}{8}x-\frac{7}{16}\cdots\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$$

$$g\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)=\frac{15}{8}\alpha+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{15}{4}\alpha\right)$$

$$\cdots\frac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$



(c)　
$$P(A)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{15}{4}\alpha\right)$$

$$P(B)=1-P(A)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{15}{4}\alpha\right)$$

より

$$\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{1+\dfrac{15}{4}\alpha}{1-\dfrac{15}{4}\alpha}$$

$$=\left(1+\frac{15}{4}\alpha\right)\cdot\left(1-\frac{15}{4}\alpha\right)^{-1}$$

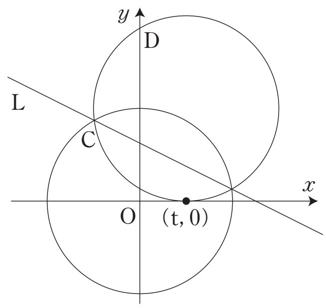
$$\fallingdotseq\left(1+\frac{15}{4}\alpha\right)\cdot\left(1+\frac{15}{4}\alpha\right)$$

$$\fallingdotseq 1+\frac{15}{2}\alpha\cdots\frac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

$\boxed{2}$ **【解】**

(a)　折り返したあとの円弧も，もとの円と半径は同じ $1\cdots\boxed{\text{ア}}$ である。

x 軸と点 $(t,0)$ で接する半径 1 の円で，その中心が $y>0$ の範囲にあるとき，中心の座標は $(t,1)\cdots\boxed{\text{イ}}$ である。



(b)　2 つの円の方程式は

$C:x^2+y^2-1=0$

$D:(x-t)^2+(y-1)^2-1=0$

である。実数 k を用いて

$(x^2+y^2-1)+k\{(x-t)^2+(y-1)^2-1\}=0$

と表される図形は 2 つの円の交点を通る図形を表す。とくに $k=-1$ のときこの図形は直線 l を表す。よって直線 l の方程式は

$2tx+2y=t^2+1\cdots\boxed{\text{ウ}},\ \boxed{\text{エ}},\ \boxed{\text{オ}}$

(c)　直線 l の方程式を t について整理して

$t^2-2xt+(-2y+1)=0$

これを t についての 2 次方程式とみて，判別式を D とすると

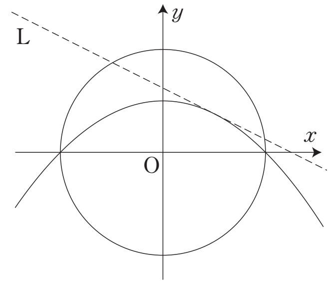
$$\frac{D}{4}=x^2-(-2y+1)$$

よって，実数解をもつ条件は $D\geqq0$ より

$x^2+2y-1\geqq0\cdots\boxed{\text{カ}},\ \boxed{\text{キ}}$

これは，実数 t が変化するときに直線 l が通過する領域を表す。また，直線 l はつねに放物線

$y=\dfrac{1-x^2}{2}$ に接する（包絡線）。



t の値が -1 から 1 まで変化するときの直線 l の通過領域のうち，円 C の内部にある部分の面積は

$$\frac{1}{2}\pi-\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x^2}{2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\pi-\left[\frac{x}{2}-\frac{x^3}{6}\right]_{-1}^{1}$$

$$=\frac{1}{2}\pi-\frac{2}{3}\cdots\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}-\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

$\boxed{3}$ **【解】**

(a)　平面 α 上の点を (x,y,z) とすると，法線ベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,1,1)$ であることから

$(1,1,1)\cdot(x-t,\ y-t,\ z-t)=0$

$x+y+z=3t\cdots\boxed{\text{ア}}$

この両辺を 2 乗して

$x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=9t^2$

これと

$2x^2+2y^2+2z^2-2(xy+yz+zx)=3\cdots(*)$

を左辺どうし，右辺どうし加えて

$3(x^2+y^2+z^2)=3+9t^2$

$x^2+y^2+z^2=1+3t^2\cdots\boxed{\text{イ}},\ \boxed{\text{ウ}}$

(b)　球の半径は $\sqrt{1+3t^2}$ であり，S の中心 $\mathrm{O}(0,0,0)$から平面 α までの距離は

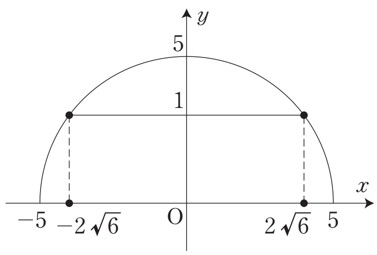
$\mathrm{OT}=\sqrt{t^2+t^2+t^2}=\sqrt{3}\,t$

よって，球 S の平面 α による断面に現れる円の半径は

$\sqrt{(\sqrt{1+3t^2})^2-(\sqrt{3}\,t)^2}=1\cdots\boxed{\text{エ}}$

(c)　$t=2\sqrt{2}$ のとき，$\mathrm{OT}=2\sqrt{6}$ であり球 S の半径は5である。

円柱 P の軸を回転させて x 軸に重ねることで，求める立体の体積は



$$2\int_{2\sqrt{6}}^{5}\pi(25-x^2)\,dx+\pi\cdot1^2\cdot4\sqrt{6}$$

$$=2\pi\left[25x-\frac{x^3}{3}\right]_{2\sqrt{6}}^{5}+\pi\cdot4\sqrt{6}$$

$$=2\pi\left(125-\frac{125}{3}\right)-2\pi(50\sqrt{6}-16\sqrt{6})$$
$$+4\sqrt{6}\,\pi$$

$$=\pi\left(\frac{500}{3}-64\sqrt{6}\right)$$

$$\cdots\frac{\boxed{\text{オカキ}}}{\boxed{\text{ク}}},\ \boxed{\text{ケコ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$$

4 【解】

(a)　$\alpha^n=a_n+ib_n$

の両辺に $\alpha=3+4i$ をかけて

$$\alpha^{n+1}=(a_n+ib_n)(3+4i)$$
$$=(3a_n-4b_n)+i(4a_n+3b_n)$$

これが $a_{n+1}+ib_{n+1}$ に等しいので，実部どうし虚部どうしを比較して

$$a_{n+1}=3a_n-4b_n\cdots\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}$$
$$b_{n+1}=4a_n+3b_n\cdots\boxed{\text{ウ}},\ \boxed{\text{エ}}$$

(b)　①より $b_n=\dfrac{-a_{n+1}+3a_n}{4}$

また $b_{n+1}=\dfrac{-a_{n+2}+3a_{n+1}}{4}$

これらを②に代入して

$$\frac{-a_{n+2}+3a_{n+1}}{4}=4a_n+3\cdot\frac{-a_{n+1}+3a_n}{4}$$
$$-a_{n+2}+3a_{n+1}=16a_n+3(-a_{n+1}+3a_n)$$
$$a_{n+2}=6a_{n+1}-25a_n\cdots\boxed{\text{オ}},\ \boxed{\text{カキ}}$$

(c)　$\alpha=3+4i$

$$\alpha^2=(3+4i)^2=-7+24i$$

よって

$$a_1=3,\ a_2=-7\cdots\boxed{\text{ク}},\ \boxed{\text{ケ}}$$

この2つは，いずれも5で割ったときの余りは3である。

ここで漸化式④を

$$a_{n+2}-a_{n+1}=5(a_{n+1}-5a_n)$$

と変形することで $a_{n+2}-a_{n+1}$ は5の整数倍とわかる。

よって帰納的に，a_n を5で割ったときの余りはつねに3…$\boxed{\text{コ}}$ とわかる。

ここで③を

$$b_n{}^2=5^{2n}-a_n{}^2$$

と変形することで b_n は5の整数倍でないとわかる。

よって $b_n\neq0$ であり，α^n は実数になることはないとわかる。

2月号では，東京慈恵会医科大学と昭和大学医学部の数学を攻略しますので，ご期待ください！

全12校の掲載予定は以下のとおりとなっております。

第109回／4月号　東邦大学医学部
第110回／6月号　東京女子医科大学
第111回／6月号　金沢医科大学
第112回／8月号　岩手医科大学
第113回／8月号　北里大学医学部
第114回／10月号　日本大学医学部
第115回／10月号　聖マリアンナ医科大学
第116回／10月臨時増刊号　愛知医科大学
第117回／12月号　東京医科大学
第118回／12月号　杏林大学医学部
第119回／2月号　東京慈恵会医科大学
第120回／2月号　昭和大学医学部