東大螢雪会 **医学部数学** 攻略演習

マンツーマン指導で医歯薬学部に多くの合格者を輩出している「東大螢雪会」では，主要な私立大学医学部の予想問題を作成しています。このコーナーでは，「東大螢雪会」の作成した予想問題を用いて，主要な私立大学医学部の数学を攻略するための演習を行います。隔月刊で毎号２校分の演習を行い，全12校の連載となる予定です。

今月号１校目は，東京医科大学の数学を攻略します！

第117回 東京医科大学 編

東大螢雪会講師　上野 尚人

東京医科大学の数学は，制限時間60分で大問５つが出題されます。大問１から４はマークセンス式（一部小問集合），大問５は記述式です。今回の予想問題では７割程度の得点を目指してください。

1 表と裏の出る確率がともに $\frac{1}{2}$ であるような硬貨がある。数直線上の動点 P は，最初は原点 O にあり，硬貨を投げて表が出れば正の方向に 2 だけ進み，裏が出れば正の方向に 1 だけ進む。この操作を繰り返し行っていくとき，動点 P が点 A(5) に止まる確率は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$ である。また，動点 P が点 B(10) に止まったとき，点 A(5) に止まっていた条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{オカキ}}}{\boxed{\text{クケコ}}}$ である。

2

(1) 任意の角度 x に対して，等式

$$\tan x \cdot \tan(x+120^\circ) \cdot \tan(x-120^\circ) = -\tan \boxed{\text{ア}}\, x$$

が成立する。この等式から，

$$\frac{\tan 20^\circ \tan 40^\circ}{\tan 10^\circ} = \sqrt{\boxed{\text{イ}}}$$

とわかる。

(2) 円に内接する六角形 ABCDEF は，

$$AB = BC = CD = 1,\ DE = EF = FA = 2$$

をみたしている。この六角形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

$\boxed{3}$ 5組のデータ

$(x,\ y)=(1,1),(2,4),(3,9),(4,16),(5,25)$

が与えられたとき，x と y の相関係数を r とすると $r^2=\dfrac{\boxed{アイウ}}{\boxed{エオカ}}$ である。

$\boxed{4}$ 三角形ABCはAB＝7，BC＝8，CA＝5をみたす。この三角形の内心をI，外心をO，垂心をHとすると

$$\overrightarrow{AI}=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イウ}}\overrightarrow{AB}+\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AO}=\frac{\boxed{カキ}}{\boxed{クケ}}\overrightarrow{AB}+\frac{\boxed{コサ}}{\boxed{シスセ}}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AH}=\frac{\boxed{ソ}}{\boxed{タチ}}\overrightarrow{AB}+\frac{\boxed{ツテ}}{\boxed{トナ}}\overrightarrow{AC}$$

である。

$\boxed{5}$ 複素数平面上の4点O(0)，A(1)，B$(1+i)$，C(i)を考える。点P(z)が正方形OABCの辺上をO，A，B，C，Oの順に一周する。$w=z^2$ とするとき，点Q(w)が複素数平面上で描く図形を描き，その図形によって囲まれる部分の面積を求めよ。

$\boxed{5}$の解答は，数学解答記入用紙に解答の曲線と面積の値だけを記入せよ。解答の曲線以外の補助線や目盛りの数値を新たに記入してはならない。

$\boxed{1}$ **【解】**

硬貨の表が出る事象をT，裏が出る事象をBと表す。動点Pが点A(5)に止まるのは

「T2回・B1回」「T1回・B3回」「B5回」

のいずれかになったときである。それぞれの確率を反復試行の式で求めて

$${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1+{}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$=\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\frac{1}{32}=\frac{21}{32}\cdots\frac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウエ}}$$

動点Pが点B(10)に止まるのは

「T5回」「T4回・B2回」「T3回・B4回」

「T2回・B6回」「T1回・B8回」「B10回」のいずれかになったときである。その確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5+{}_6C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+{}_7C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$+{}_8C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6+{}_9C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8+\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$=\frac{1}{32}+\frac{15}{64}+\frac{35}{128}+\frac{28}{256}+\frac{9}{512}+\frac{1}{1024}=\frac{683}{1024}$$

動点Pが点Aに止まり，かつ点Bにも止まる確率は（OからAに至る確率とAからBに至る確率は同じなので）

$$\left(\frac{21}{32}\right)^2=\frac{441}{1024}$$

よって求める条件付き確率は

$$\frac{441}{1024}\div\frac{683}{1024}=\frac{441}{683}\cdots\frac{\boxed{オカキ}}{\boxed{クケコ}}$$

$\boxed{2}$ **【解】**

(1)　以下，$\tan x = t$ とおく。

$$\tan(x+120^\circ) = \frac{\tan x + \tan 120^\circ}{1-\tan x \tan 120^\circ} = \frac{t+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\,t}$$

$$\tan(x-120^\circ) = \frac{\tan x - \tan 120^\circ}{1+\tan x \tan 120^\circ} = \frac{t-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\,t}$$

よって

$$\tan x \cdot \tan(x+120^\circ) \cdot \tan(x-120^\circ)$$
$$= t \cdot \frac{t+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\,t} \cdot \frac{t-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\,t} = \frac{t^3-3t}{1-3t^2}$$

ここで

$$\tan 2x = \frac{\tan x + \tan x}{1-\tan x \tan x} = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$\tan 3x = \frac{\tan 2x + \tan x}{1-\tan 2x \tan x} = \frac{\dfrac{2t}{1-t^2}+t}{1-\dfrac{2t}{1-t^2}\cdot t}$$

$$= \frac{3t-t^3}{1-3t^2}$$

よって

$$\tan x \cdot \tan(x+120^\circ) \cdot \tan(x-120^\circ)$$
$$= -\tan 3x \cdots \boxed{ア}$$

両辺に $x = 10^\circ$ を代入して

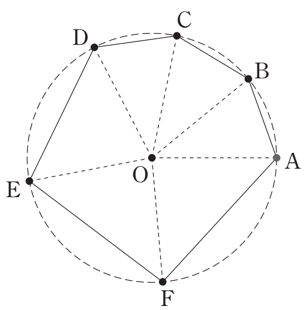
$$\tan 10^\circ \cdot \tan 130^\circ \cdot \tan(-110^\circ) = -\tan 30^\circ$$

$$\tan 10^\circ \cdot \left(-\frac{1}{\tan 40^\circ}\right) \cdot \tan 70^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

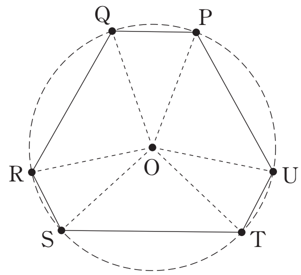
$$\tan 10^\circ \cdot \left(-\frac{1}{\tan 40^\circ}\right) \cdot \frac{1}{\tan 20^\circ} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\tan 20^\circ \tan 40^\circ}{\tan 10^\circ} = \sqrt{3} \cdots \boxed{イ}$$

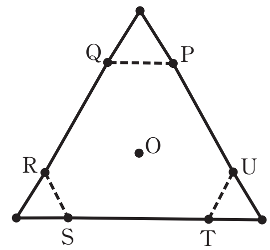
(2)　与えられた六角形の外接円の中心を O とする。O を六角形の各頂点と結び，六角形を 6 つの二等辺三角形に分割する。



この 6 つの二等辺三角形を 1 つおきに並べ替える。



こうしてできた六角形 PQRSTU は，「1 辺 4 の正三角形から，1 辺 1 の正三角形 3 つを除いたもの」である。



よって求める面積は

$$\frac{1}{2}\cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ\right)$$

$$= \frac{13\sqrt{3}}{4} \cdots \frac{\boxed{ウエ}\sqrt{\boxed{オ}}}{\boxed{カ}}$$

$\boxed{3}$ **【解】**

x の平均は

$$(1+2+3+4+5) \div 5 = 3$$

y の平均は

$$(1+4+9+16+25) \div 5 = 11$$

x^2 の平均は y の平均と同じ11

y^2 の平均は

$$(1^2+4^2+9^2+16^2+25^2) \div 5 = \frac{979}{5}$$

よって x の分散は

$$s_x{}^2 = 11 - 3^2 = 2$$

y の分散は

$$s_y{}^2 = \frac{979}{5} - 11^2 = \frac{374}{5}$$

また，xy の平均は

$$(1\cdot 1 + 2\cdot 4 + 3\cdot 9 + 4\cdot 16 + 5\cdot 25) \div 5 = 45$$

よって x と y の共分散は

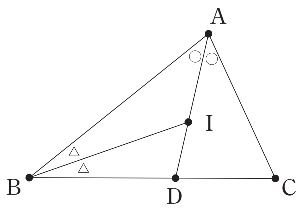
$$s_{xy}=45-3\cdot 11=12$$

以上より，x と y の相関係数 r を2乗した値は

$$r^2=\frac{{s_{xy}}^2}{{s_x}^2{s_y}^2}=\frac{144}{2\cdot\dfrac{374}{5}}=\frac{180}{187}\cdots\frac{\boxed{\text{アイウ}}}{\boxed{\text{エオカ}}}$$

$\boxed{4}$ **【解】**

- 内心 I について



辺 BC 上に点 D をとり，AD が ∠BAC の二等分線になるようにする。このとき

$$BD:DC=AB:AC=7:5$$

よって

$$\overrightarrow{AD}=\frac{5}{12}\overrightarrow{AB}+\frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$$

である。

また $BD=BC\cdot\dfrac{7}{7+5}=\dfrac{14}{3}$ である。

三角形 ABD で考えると，BI が ∠ABD の二等分線になっており

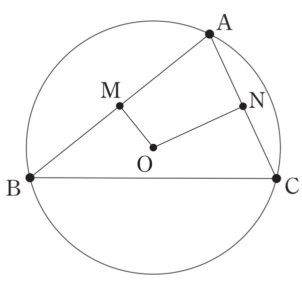
$$AI:ID=BA:BD=3:2$$

なので

$$\overrightarrow{AI}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{7}{20}\overrightarrow{AC}$$

$$\cdots\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}},\ \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}$$

- 外心 O について



$$\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=64$$

$$\left|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right|^2=64$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=64$$

$$25-2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+49=64$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=5$$

外心 O は各辺の垂直二等分線の交点である。

AB の中点を M，AC の中点を N とすると

$$\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{AB}=0\cdots①$$

$$\overrightarrow{NO}\cdot\overrightarrow{AC}=0\cdots②$$

が成立する。ここで

$$\overrightarrow{AO}=x\,\overrightarrow{AB}+y\,\overrightarrow{AC}$$

とおくと

$$\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AM}=\left(x-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB}+y\,\overrightarrow{AC}$$

よって，①より

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+y\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$$

$$49\left(x-\frac{1}{2}\right)+5y=0\cdots①'$$

また

$$\overrightarrow{NO}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AN}=x\,\overrightarrow{AB}+\left(y-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC}$$

よって，②より

$$x\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\left(y-\frac{1}{2}\right)\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=0$$

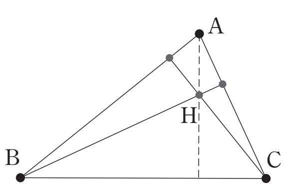
$$5x+25\left(y-\frac{1}{2}\right)=0\cdots②'$$

①′，②′ を解いて $x=\dfrac{11}{24}$，$y=\dfrac{49}{120}$　よって

$$\overrightarrow{AO}=\frac{11}{24}\overrightarrow{AB}+\frac{49}{120}\overrightarrow{AC}$$

$$\cdots\frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{クケ}}},\ \frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シスセ}}}$$

- 垂心 H について



$\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \cdots ③$

$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \cdots ④$

が成立。ここで

$\overrightarrow{AH} = p\,\overrightarrow{AB} + q\,\overrightarrow{AC}$

とおくと

$\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AC} = p\,\overrightarrow{AB} + (q-1)\,\overrightarrow{AC}$

よって，③より

$p\,|\overrightarrow{AB}|^2 + (q-1)\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

$49p + 5(q-1) = 0 \cdots ③'$

また

$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AB} = (p-1)\,\overrightarrow{AB} + q\,\overrightarrow{AC}$

よって，④より

$(p-1)\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + q\,|\overrightarrow{AC}|^2 = 0$

$5(p-1) + 25q = 0 \cdots ④'$

③′，④′を解いて$p = \dfrac{1}{12}$，$q = \dfrac{11}{60}$

よって

$$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{12}\overrightarrow{AB} + \frac{11}{60}\overrightarrow{AC} \cdots \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タチ}}},\ \frac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{トナ}}}$$

$\boxed{5}$ 【解】

以下，z, w, i 以外の文字はすべて実数とする。

• 点 P が O から A までを動くとき

$z = t + 0i\ (0 \leqq t \leqq 1)$ として $w = t^2$

よって $w = x + yi$ とすると

$x = t^2$，$y = 0$

このとき点 Q は複素数平面上で点 (0) と点 (1) を結ぶ線分を描く。

• 点 P が A から B までを動くとき

$z = 1 + ti\ (0 \leqq t \leqq 1)$ として $w = (1 - t^2) + 2ti$

よって $w = x + yi$ とすると

$x = 1 - t^2$，$y = 2t$ であり，

$x = 1 - \dfrac{y^2}{4}\ (0 \leqq y \leqq 2)$ で表される放物線の一部を描く。

• 点 P が B から C までを動くとき

$z = t + i\ (0 \leqq t \leqq 1)$ として $w = (t^2 - 1) + 2ti$

よって $w = x + yi$ とすると

$x = t^2 - 1$，$y = 2t$ であり，

$x = \dfrac{y^2}{4} - 1\ (0 \leqq y \leqq 2)$ で表される放物線の一部を描く。

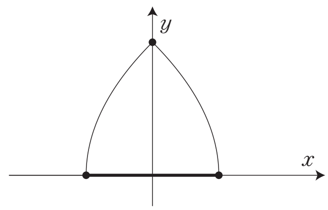
• 点 P が C から D までを動くとき

$z = 0 + ti\ (0 \leqq t \leqq 1)$ として $w = -t^2$

よって $w = x + yi$ とすると

$x = 0$，$y = -t^2$

このとき点 Q は複素数平面上で点 (0) と点 (−1) を結ぶ線分を描く。



この図形によって囲まれる部分の面積は

$$2\int_0^2 \left(1 - \frac{y^2}{4}\right) dy = 2\left[y - \frac{y^3}{12}\right]_0^2 = \frac{8}{3} \cdots\cdots (答)$$

2 月号では，東京慈恵会医科大学と昭和大学医学部の数学を攻略しますので，ご期待ください！

全12校の掲載予定は以下のとおりとなっております。

第109回／ 4 月号　東邦大学医学部
第110回／ 6 月号　東京女子医科大学
第111回／ 6 月号　金沢医科大学
第112回／ 8 月号　岩手医科大学
第113回／ 8 月号　北里大学医学部
第114回／10月号　日本大学医学部
第115回／10月号　聖マリアンナ医科大学
第116回／10月臨時増刊号　愛知医科大学
第117回／12月号　東京医科大学
第118回／12月号　杏林大学医学部
第119回／ 2 月号　東京慈恵会医科大学
第120回／ 2 月号　昭和大学医学部