東大螢雪会 医学部数学 攻略演習

マンツーマン指導で医歯薬学部に多くの合格者を輩出している「東大螢雪会」では，主要な私立大学医学部の予想問題を作成しています。このコーナーでは，「東大螢雪会」の作成した予想問題を用いて，主要な私立大学医学部の数学を攻略するための演習を行います。隔月刊で毎号２校分の演習を行い，全12校の連載となる予定です。

今月号では，愛知医科大学医学部の数学を攻略します！

第116回　愛知医科大学医学部 編

東大螢雪会講師　上野 尚人

愛知医科大学・医学部の数学は，制限時間80分で大問３つが出題されます。大問１は３問からなる小問集合（答のみを記入する客観式），大問２と大問３は記述式です。今回の予想問題では６割程度の得点を目指してください。

1　次の⑴～⑶の設問に対して，答えのみを下の解答欄に記入せよ。

⑴　n の n 乗が n 桁の数となるような正の整数 n の値をすべて求めよ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$，$\log_{10} 7 = 0.8541$ とする。

⑵
$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$$
で定義された数列 $\{a_n\}$ がある。i を虚数単位としたとき，
$$\sum_{n=1}^{2020} i^{a_n}$$
の値を求めよ。

⑶「各面に１から４までの整数が１つずつかかれた正四面体のサイコロ A」「各面に１から６までの整数が１つずつかかれた正六面体のサイコロ B」「各面に１から８までの整数が１つずつかかれた正八面体のサイコロ C」が１個ずつある。この３個のサイコロを同時にふったときに出た目の和を考える。ただしどのサイコロも各面が等確率で出るものとする。

ａ）サイコロ A, B, C の目の和が偶数になる確率を求めよ。

ｂ）サイコロ A, B, C の目の和が３の倍数になる確率を求めよ。

$\boxed{2}$　x, y の多項式

$$f(x, y)=3x^4+10x^2y^2+3y^4-12x^2-12y^2+9$$

を考える。

(1)　xy 平面上で等式 $f(x, y)=0$ が表す図形を描け。

(2)　xy 平面上で不等式 $f(x, y)\leqq 0$ が表す部分の面積を求めよ。

$\boxed{3}$

(1)　$\alpha=\cos\theta$ とする。$\cos 3\theta, \cos 4\theta$ をそれぞれ α の多項式で表せ。

(2)　$\beta=\cos\dfrac{\pi}{7}$ とする。整数を係数にもつ x の 3 次多項式 $f(x)$ で，$x=\beta$ を解にもち，かつ $f(0)=1$ をみたすものを求めよ。

(3)　$0.9<\cos\dfrac{\pi}{7}$ を示せ。

$\boxed{1}$　**【解】**

(1)　求める条件は

$$10^{n-1}\leqq n^n<10^n$$

と言い換えられる。各辺の常用対数をとって

$$n-1\leqq n\log_{10} n<n$$

各辺を正の数 n で割って

$$1-\frac{1}{n}\leqq\log_{10} n<1$$

$\log_{10} n<1$ より n は 9 以下の整数とわかる。
よって，不等式

$$1-\frac{1}{n}\leqq\log_{10} n\ \cdots(*)$$

を満たす 1 以上 9 以下の整数を求めればよい。
順に代入すると

- $n=1$ のとき（左辺）$=0$,
(右辺)$=\log_{10} 1=0$となり成立

- $n=2$ のとき（左辺）$=\dfrac{1}{2}=0.5$,
(右辺)$=\log_{10} 2=0.30\ldots$ となり不成立

- $n=3$ のとき（左辺）$=\dfrac{2}{3}=0.66\ldots$,
(右辺)$=\log_{10} 3=0.47\ldots$ となり不成立

- $n=4$ のとき（左辺）$=\dfrac{3}{4}=0.75$,
(右辺)$=\log_{10} 4=2\log_{10} 2=0.60\ldots$ となり不成立

- $n=5$ のとき（左辺）$=\dfrac{4}{5}=0.8$,
(右辺)$=\log_{10} 5=1-\log_{10} 2=0.69\ldots$ となり不成立

- $n=6$ のとき（左辺）$=\dfrac{5}{6}=0.83\ldots$,
(右辺)$=\log_{10} 6=\log_{10} 2+\log_{10} 3=0.77\ldots$ となり不成立

- $n=7$ のとき（左辺）$=\dfrac{6}{7}=0.85\ldots$,
(右辺)$=\log_{10} 7=0.84\ldots$ となり不成立

- $n=8$ のとき（左辺）$=\dfrac{7}{8}=0.875$,

  （右辺）$=\log_{10}8=3\log_{10}2=0.90\ldots$ となり成立

- $n=9$ のとき（左辺）$=\dfrac{8}{9}=0.88\ldots$,

  （右辺）$=\log_{10}9=2\log_{10}3=0.94\ldots$ となり成立

よって求める整数 n は

$1, 8, 9$ …… (答)

(2)　$i^2=-1$，$i^3=-i$，$i^4=1$

なので a_n を 4 で割ったときの余りを b_n とすると $i^{a_n}=i^{b_n}$ である。以下，合同式の法を 4 とする。

$a_1=1$，$a_2=1$，$a_3=1+1=2$

$a_4=1+2=3$，$a_5=2+3=5\equiv 1$

$a_6=3+5=8\equiv 0$，$a_7=5+8=13\equiv 1$

$a_8=8+13=21\equiv 1$

$(b_1, b_2)=(1, 1)$ と $(b_7, b_8)=(1, 1)$ が一致し，この数列を定義する 3 項間漸化式の形より b_3 以降の列と b_9 以降の列も一致。よって数列 $\{b_n\}$ は周期 6 で

$1, 1, 2, 3, 1, 0$

を繰り返す。ここで

$2020\div 6=336$ あまり 4

なので，求める和は

$$\sum_{n=1}^{2020} i^{a_n}=\sum_{n=1}^{2020} i^{b_n}$$
$$=(i^1+i^1+i^2+i^3+i^1+i^0)\cdot 336$$
$$\quad+(i^1+i^1+i^2+i^3)$$
$$=(2i)\cdot 336+(-1+i)$$
$$=-1+673i$$ …… (答)

(3) a ）サイコロの目の出方は $4\cdot 6\cdot 8$ $(=192)$ 通りであり，これらはすべて等確率である。

それぞれのサイコロの目の集合を，2 で割った余りで分類しておく。

$A_1=\{1, 3\}$, $A_0=\{2, 4\}$

$B_1=\{1, 3, 5\}$, $B_0=\{2, 4, 6\}$

$C_1=\{1, 3, 5, 7\}$, $C_0=\{2, 4, 6, 8\}$

3 つのサイコロの目の和が偶数になるのは「偶数 1 個と奇数 2 個」または「偶数 3 個」のとき。

- A_1, B_1, C_0 から 1 個ずつ：$2\cdot 3\cdot 4$ 通り
- A_1, B_0, C_1 から 1 個ずつ：$2\cdot 3\cdot 4$ 通り
- A_0, B_1, C_1 から 1 個ずつ：$2\cdot 3\cdot 4$ 通り
- A_0, B_0, C_0 から 1 個ずつ：$2\cdot 3\cdot 4$ 通り

よって求める確率は

$$\frac{(2\cdot 3\cdot 4)\cdot 4}{4\cdot 6\cdot 8}=\frac{1}{2}$$ …… (答)

b ）それぞれのサイコロの目の集合を，3 で割った余りで分類しておく。

$P_1=\{1, 4\}$, $P_2=\{2\}$, $P_0=\{3\}$

$Q_1=\{1, 4\}$, $Q_2=\{2, 5\}$, $Q_0=\{3, 6\}$

$R_1=\{1, 4, 7\}$, $R_2=\{2, 5, 8\}$, $R_0=\{3, 6\}$

3 つのサイコロの目の和が 3 の倍数になるのは「余り 1 の目が 3 個」または「余り 2 の目が 3 個」または「余り 0 の目が 3 個」または「余り 1, 2, 0 の目が 1 個ずつ」のとき。

- P_1, Q_1, R_1 から 1 個ずつ：$2\cdot 2\cdot 3=12$ 通り
- P_2, Q_2, R_2 から 1 個ずつ：$1\cdot 2\cdot 3=6$ 通り
- P_0, Q_0, R_0 から 1 個ずつ：$1\cdot 2\cdot 2=4$ 通り
- P_1, Q_2, R_0 から 1 個ずつ：$2\cdot 2\cdot 2=8$ 通り
- P_1, Q_0, R_2 から 1 個ずつ：$2\cdot 2\cdot 3=12$ 通り
- P_2, Q_1, R_0 から 1 個ずつ：$1\cdot 2\cdot 2=4$ 通り
- P_2, Q_0, R_1 から 1 個ずつ：$1\cdot 2\cdot 3=6$ 通り
- P_0, Q_1, R_2 から 1 個ずつ：$1\cdot 2\cdot 3=6$ 通り

- P_0, Q_2, R_1 から1個ずつ：$1\cdot2\cdot3=6$ 通り

よって求める確率は

$$\frac{12+6+4+8+12+4+6+6+6}{4\cdot6\cdot8}$$

$$=\frac{64}{4\cdot6\cdot8}=\frac{1}{3}\cdots\cdots(答)$$

$\boxed{2}$ **【解】**

(1)

$$f(x, y)=3x^4+(10y^2-12)x^2+(3y^4-12y^2+9)$$
$$=3x^4+(10y^2-12)x^2+(3y^2-1)(y^2-3)$$
$$=\{x^2+3(y^2-1)\}\{3x^2+(y^2-3)\}$$
$$=(x^2+3y^2-3)(3x^2+y^2-3)$$

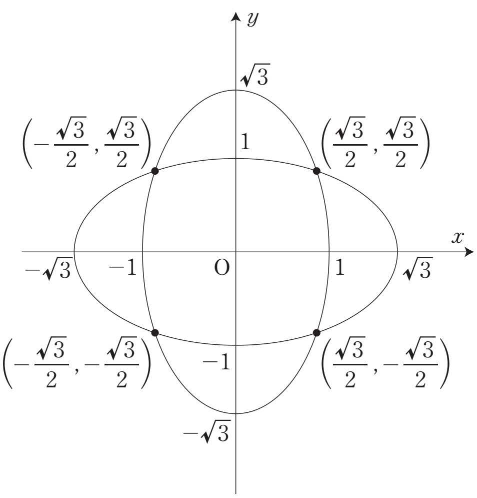
よって方程式 $f(x, y)=0$ の表す図形は

$$x^2+3y^2-3=0,\ 3x^2+y^2-3=0$$

$$\frac{x^2}{3}+y^2=1\cdots①,\ x^2+\frac{y^2}{3}=1\cdots②$$

という2つの楕円をあわせたものである。

2つの楕円の交点の座標は，連立方程式①かつ②を解くことにより $(x, y)=\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$（複号任意）とわかる。よって概形は図のようになる。



(2) 求める領域は

$$(x^2+3y^2-3)(3x^2+y^2-3)\leqq 0$$

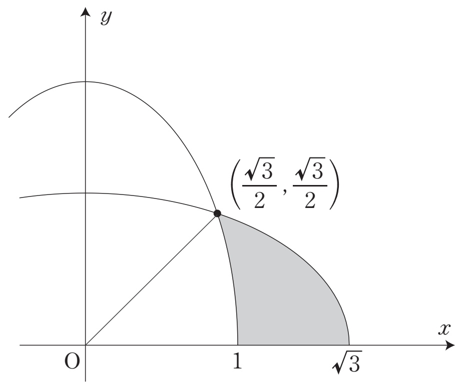
「$x^2+3y^2-3\geqq 0$ かつ $3x^2+y^2-3\leqq 0$」

または「$x^2+3y^2-3\leqq 0$ かつ $3x^2+y^2-3\geqq 0$」

すなわち，「楕円①の外側かつ楕円②の内側」または「楕円①の内側かつ楕円②の外側」である。この図形は x 軸対称，y 軸対称，および直線 $y=x$ に関して対称なので，この図形の8分の1にあたる

$$0\leqq y\leqq x$$

の部分の面積を求めてから8倍すればよい。



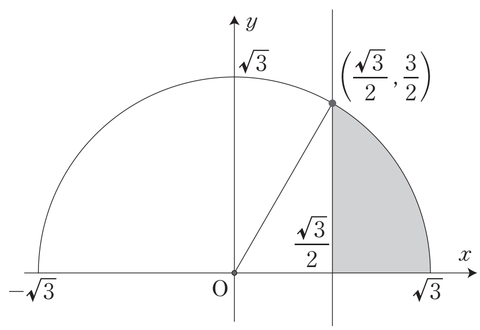
図の部分の面積は

$$\frac{S}{8}=\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}\,dx-\int_{1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{3-3x^2}\,dx$$

である。ここで

$$S_1=\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}\,dx$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}}\sqrt{3-x^2}\,dx$$

であり，この定積分は半円 $y=\sqrt{3-x^2}$ と直線 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ および x 軸が囲む部分の面積として求められる。



よって

$$S_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(3\pi\cdot\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)$$

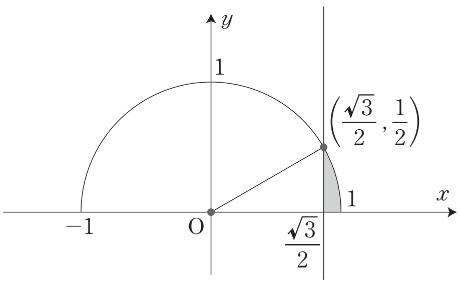
$$=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi-\frac{3}{8}$$

また

$$S_2=\int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{3-3x^2}\,dx$$

$$=\sqrt{3}\int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

についても，定積分の部分は同様に半円 $y=\sqrt{1-x^2}$ と直線 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ および x 軸が囲む部分の面積として求められる。



$$S_2=\sqrt{3}\left(\pi\cdot\frac{1}{12}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{12}\pi-\frac{3}{8}$$

よって求める面積は

$$S=8(S_1-S_2)=8\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\pi-\frac{\sqrt{3}}{12}\pi\right)$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi\ \cdots\cdots\text{(答)}$$

$\boxed{3}$ 【解】

(1) $\cos 3\theta=\cos(2\theta+\theta)$

$=\cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta$

$=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-(2\sin\theta\cos\theta)\sin\theta$

$=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2\cos\theta(1-\sin^2\theta)$

$=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

$\cos 4\theta=\cos 2(2\theta)=2\{\cos(2\theta)\}^2-1$

$=2(2\cos^2\theta-1)^2-1=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$

よって

$\cos 3\theta=4\alpha^3-3\alpha$，$\cos 4\theta=8\alpha^4-8\alpha^2+1$

$\cdots\cdots$(答)

(2) $\theta=\dfrac{\pi}{7}$ とすると $7\theta=\pi$ より $3\theta=\pi-4\theta$ よって

$\cos 3\theta=\cos(\pi-4\theta)$

$\cos 3\theta=-\cos 4\theta$

ここで(1)の結果を用いて

$4\beta^3-3\beta=-(8\beta^4-8\beta^2+1)$

$8\beta^4+4\beta^3-8\beta^2-3\beta+1=0$

$\beta=-1$ がこの等式をみたすことを用いて因数分解して

$(\beta+1)(8\beta^3-4\beta^2-4\beta+1)=0$

よって，求める3次多項式は

$f(x)=8x^3-4x^2-4x+1\ \cdots\cdots$(答)

(3) θ の方程式 $\cos 3\theta=-\cos 4\theta$ の一般解を考える。以下，n を整数とする。

$\cos 4\theta+\cos 3\theta=0$

$2\cos\dfrac{7}{2}\theta\cos\dfrac{1}{2}\theta=0$

$\cos\dfrac{7}{2}\theta=0$ を解くと $\dfrac{7}{2}\theta=\dfrac{2n+1}{2}\pi$ より

$\theta=\dfrac{2n+1}{7}\pi$ である。

$\cos\dfrac{1}{2}\theta=0$ を解くと $\dfrac{1}{2}\theta=\dfrac{2n+1}{2}\pi$ より

$\theta=(2n+1)\pi$ である。

よって，3次方程式 $f(x)=0$ の解は $x=\cos\dfrac{1}{7}\pi$，

$\cos\dfrac{3}{7}\pi$，$\cos\dfrac{5}{7}\pi$ の3個とわかる。

$\cos\dfrac{\pi}{7}>\cos\dfrac{3}{7}\pi>\cos\dfrac{5}{7}\pi$ なので，$f(x)=0$ の3つの解のうち最も大きいものが0.9より大であることを示せばよい。

$f(1)=8-4-4+1=0$

$f(0.9)=8\cdot 0.729-4\cdot 0.81-4\cdot 0.9+1$

$=5.832-3.24-3.6+1=-0.008<0$

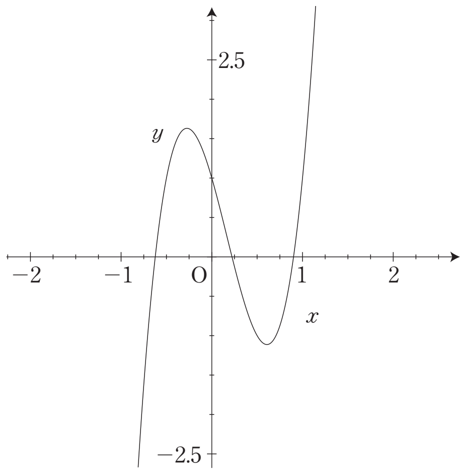
$f(0)=1>0$

$f(-1)=-8-4+4+1=-7<0$

$f(x)$ はすべての実数 x において連続なので，中間値の定理より

$$-1<\cos\frac{5}{7}\pi<0<\cos\frac{3}{7}\pi<0.9<\cos\frac{\pi}{7}<1$$

よって題意は示された。　　　【証明終】



12月号では，東京医科大学と杏林大学医学部の数学を攻略しますので，ご期待ください！

全12校の掲載予定は以下のとおりとなっております。

第109回／４月号　東邦大学医学部
第110回／６月号　東京女子医科大学
第111回／６月号　金沢医科大学
第112回／８月号　岩手医科大学
第113回／８月号　北里大学医学部
第114回／10月号　日本大学医学部
第115回／10月号　聖マリアンナ医科大学
第116回／10月臨時増刊号　愛知医科大学
第117回／12月号　東京医科大学
第118回／12月号　杏林大学医学部
第119回／２月号　東京慈恵会医科大学
第120回／２月号　昭和大学医学部