東大螢雪会 医学部数学 攻略演習

マンツーマン指導で医歯薬学部に多くの合格者を輩出している「東大螢雪会」では，主要な私立大学医学部の予想問題を作成しています。このコーナーでは，「東大螢雪会」の作成した予想問題を用いて，主要な私立大学医学部の数学を攻略するための演習を行います。隔月刊で毎号２校分の演習を行い，全12校の連載となる予定です。

今月号２校目は，聖マリアンナ医科大学の数学を攻略します！

第115回 聖マリアンナ医科大学 編

東大螢雪会講師　上野 尚人

聖マリアンナ医科大学の数学は，制限時間90分で大問４つが出題されます。大問１は４問からなる小問集合（答のみを記入する客観式），大問２から大問4は誘導に沿って空欄を埋める客観式と記述式の融合形式です。今回の予想問題では６割程度の得点を目指してください。

$\boxed{1}$ 以下の設問(1)の $\boxed{ア}$ ～ $\boxed{ウ}$ に当てはまる適切な語句と設問(2)～(4)の $\boxed{エ}$ ～ $\boxed{カ}$ に適する数を解答用紙の所定の欄に記入せよ。ただし $\boxed{ア}$ と $\boxed{イ}$ は解答の順番を問わない。

(1) 三角形の外心・内心・重心・垂心について考える。４点のうち，三角形の外部にくることがあるのは $\boxed{ア}$ 心と $\boxed{イ}$ 心である。とくにこの２つの点が三角形の周上にくるのは，三角形の形状が $\boxed{ウ}$ のときである。

(2) $\int_0^{\pi} x \cdot e^x \cdot \sin x dx = \boxed{エ}$ である。

(3) ４辺の長さが $AB=3$，$BC=5$，$CD=8$，$DA=5$ であるような四角形 ABCD の面積の最大値は $\boxed{オ}$ である。

(4) ５枚のコインを用意する。

- １回目の試行では５枚のコインを同時に投げ，裏が出たコインを取り除く。（この試行ですべて裏が出た場合には２回目の試行は行わない）
- ２回目の試行では，１回目の試行で残った（表が出た）コインのみをすべて同時に投げ，裏が出たコインを取り除く。

２回目の試行の終了時点でコインが１枚だけ残っている確率は $\boxed{カ}$ である。ただしコインで表が出る確率と裏が出る確率は等しいものとする。

$\boxed{2}$ 以下の設問(1)～(2)の $\boxed{キ}$ ～ $\boxed{コ}$ に当てはまる適切な数または数式を解答用紙の所定の欄に記入せよ。また，設問(3)の解答を所定の欄に述べよ。

ある立体図形 P は，１辺の長さが等しい正五角形と正六角形を貼り合わせた形をしている。この立

体図形 P について以下の問いに答えよ。

⑴　立体図形 P の頂点の数を v，辺の数を e，面の数を f とすると，オイラーの多面体定理により $v-e+f=$ $\boxed{\text{キ}}$ が成立している。

⑵　立体図形 P を構成する正五角形の数を x，正六角形の数を y とする。各頂点には3つの正多角形が集まっているものとする。このとき v, e, f をそれぞれ x, y で表すと

$$v=\boxed{\text{ク}},\ e=\boxed{\text{ケ}},\ f=\boxed{\text{コ}}$$

となる。

⑶　⑵の状況のもと，さらに P の各頂点には「正五角形1つと正六角形2つ」が集まっているものとする。このとき x と y の値を求めよ。

$\boxed{3}$　項数が10であるような3つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ を次のように定める。

$\{a_n\}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$\{b_n\}=\{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2\}$

$\{c_n\}$ は，$\{b_n\}$ の各項と同じ値だが並ぶ順序は問わない

この3つの数列をデータの列とみる。以下の設問に対する解答を解答用紙の所定の欄に記入せよ。ただし解答の数値は分数のままでよい。また，必要であれば

$$\sum_{k=1}^{n} k^4=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n$$

を用いてよい。

⑴　$\{a_n\}$ の平均 $\overline{a}$ と分散 V_a，$\{b_n\}$ の平均 $\overline{b}$ と分散 V_b を求めよ。

⑵　(a_n, b_n) を1組のデータとして扱ったときの共分散 s_{xy} を求めよ。

⑶　$p<q$，$r<s$ をみたす4つの値に対して，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$(p-\overline{a})(r-\overline{b})+(q-\overline{a})(s-\overline{b})>(p-\overline{a})(s-\overline{b})+(q-\overline{a})(r-\overline{b})$$

⑷　(a_n, c_n) を1組のデータとして扱ったときの相関係数が最大になるのは，数列 $\{c_n\}$ が数列 $\{b_n\}$ と一致するときであることを示せ。

$\boxed{4}$　ある正の整数 n に対して，角度 θ の値にかかわらず等式

$$T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$$

をみたす多項式 $T_n(x)$ を考える。以下の設問に対する解答を解答用紙の所定の欄に述べよ。

⑴　$T_1(x)$，$T_2(x)$，$T_3(x)$ を x で表せ。

⑵　任意の正の整数 n に対して，等式

$$T_{n+2}(x)=2xT_{n+1}(x)-T_n(x)$$

が成り立つことを示せ。

⑶　$T_n(x)$ の次数および最高次の係数を n で表せ。

---

1 【解】

⑴　内心は「内角の二等分線の交点」なので必ず三角形の内部にある。
また，重心は「3本の中線の交点」なのでこれも必ず三角形の内部にある。
三角形の外部にくることがあるのは「外心と垂心」である。… ア，イ
外心および垂心が三角形の外部にくるのは鈍角三角形のときであり，三角形の周上にくるのは「直角三角形」… ウ のときである。
（なお，直角三角形の外心は斜辺の中点，直角三角形の垂心は直角となっている頂点そのものである。）

⑵　$f(x)=e^x\cdot\sin x,\ g(x)=x$

とおき，$\int_0^{\pi} f(x)\cdot g(x)\,dx$ に部分積分法を用いる。

$f(x)$ の不定積分のひとつを $F(x)$ とする。積分定数は省略する。

$(e^x\sin x)'=e^x(\sin x+\cos x)$

$(e^x\cos x)'=e^x(\cos x-\sin x)$

この2式の和と差を考えて

$\{e^x(\sin x+\cos x)\}'=2e^x\cos x$

$\{e^x(\sin x-\cos x)\}'=2e^x\sin x$

$$\int e^x\cos x dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)$$

$$\int e^x\sin x dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)$$

よって

$$\int_0^{\pi} f(x)\cdot g(x)\,dx$$

$$=\Big[F(x)g(x)\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}F(x)g'(x)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)\cdot x\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{1}{2}e^x(\cos x-\sin x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{\pi}\cdot\pi+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}e^x\cos x dx-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}e^x\sin x dx$$

$$=\frac{\pi}{2}e^{\pi}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)\right]_0^{\pi}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{\pi}{2}e^{\pi}-\frac{1}{2}\Big[e^x(-\cos x)\Big]_0^{\pi}$$

$$=\frac{\pi}{2}e^{\pi}-\frac{1}{2}\{e^{\pi}\cdot 1-e^0\cdot(-1)\}$$

$$=\frac{1}{2}e^{\pi}(\pi-1)-\frac{1}{2}\ \cdots\ \boxed{\text{エ}}$$

⑶　$\angle\mathrm{ABC}=t$，$\angle\mathrm{CDA}=u$ とすると，四角形ABCDの面積 S は

$$S=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{CDA}=\frac{15}{2}\sin t+20\sin u$$

$$=\frac{5}{2}(3\sin t+8\sin u)$$

$$3\sin t+8\sin u=\frac{2}{5}S\ \cdots\ ①$$

三角形ABCおよび三角形CDAそれぞれに余弦定理を適用して

$$\mathrm{CA}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\cos t=34-30\cos t$$

$$\mathrm{CA}^2=\mathrm{CD}^2+\mathrm{DA}^2-2\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DA}\cdot\cos u=89-80\cos u$$

この2式より

$$34-30\cos t=89-80\cos u$$

$$\Leftrightarrow\ 3\cos t-8\cos u=-\frac{11}{2}\ \cdots\ ②$$

①^2+②^2 より

$$3^2+8^2-2\cdot 3\cdot 8(\cos t\cos u-\sin t\sin u)=\frac{4}{25}S^2+\left(-\frac{11}{2}\right)^2$$

$$73-48\cos(t+u)=\frac{4}{25}S^2+\frac{121}{4}$$

よって $\cos(t+u)=-1$ すなわち $t+u=\pi$ となるときがあればそのとき S は最大となる。

②で $u=\pi-t$ とすると

$$3\cos t-8(-\cos t)=-\frac{11}{2} \text{ より}$$

$$\cos t=-\frac{1}{2},\ \cos u=\frac{1}{2}$$

よって $t=\dfrac{2}{3}\pi$, $u=\dfrac{\pi}{3}$ のとき S は最大となりその値は

$$S=\frac{15}{2}\sin t+20\sin u$$

$$=\frac{55}{4}\sqrt{3}\cdots \boxed{\text{オ}}$$

(4)　5 枚のコインに A, B, C, D, E の名前をつけて区別しておく。A のコインだけが残るのは

- A は 2 回連続で表
- B, C, D, E は「1 回目で裏，または 1 回目で表→2 回目で裏」

となる場合で，その確率は

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)^4$$

$$=\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{3^4}{4^5}$$

B のコインだけ，C のコインだけ，D のコインだけ，E のコインだけの場合も同じ確率なので求める値は

$$\frac{3^4}{4^5}\cdot 5=\frac{405}{1024}\cdots \boxed{\text{カ}}$$

$\boxed{2}$ 【解】

(1)　任意の多面体に対して $v-e+f=2\cdots \boxed{\text{キ}}$ が成立する。

(2)　貼り合わせる前の正五角形の頂点の総数は $5x$，正六角形の頂点の総数は $6y$ なので貼り合わせたあとの総数は

$$v=\frac{5x+6y}{3}\cdots \boxed{\text{ク}}$$

貼り合わせる前の正五角形の辺の総数は $5x$，正六角形の辺の総数は $6y$ なので貼り合わせたあとの総数は

$$e=\frac{5x+6y}{2}\cdots \boxed{\text{ケ}}$$

面の総数は $x+y\cdots \boxed{\text{コ}}$

(3)　(2)の結果を(1)に代入して

$$\frac{5x+6y}{3}-\frac{5x+6y}{2}+(x+y)=2$$

$$x=10$$

与えられた条件より，正六角形の個数は正五角形の個数の 2 倍なので

$$x=10,\ y=20\cdots\text{(答)}$$

$\boxed{3}$ 【解】

(1)　$$\overline{a}=\frac{1}{10}(1+2+\cdots+10)=\frac{55}{10}=\frac{11}{2}\cdots\text{(答)}$$

$$V_a=\frac{1}{10}(1^2+2^2+\cdots+10^2)-(\overline{a})^2$$

$$=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{6}\cdot 10\cdot 11\cdot 21-\left(\frac{11}{2}\right)^2=\frac{77}{2}-\frac{121}{4}$$

$$=\frac{33}{4}\cdots\text{(答)}$$

$$\overline{b}=\frac{1}{10}(1^2+2^2+\cdots+10^2)=\frac{77}{2}\cdots\text{(答)}$$

$$V_b=\frac{1}{10}(1^4+2^4+\cdots+10^4)-(\overline{b})^2$$

$$=\frac{1}{5}\cdot 10^5+\frac{1}{2}\cdot 10^4+\frac{1}{3}\cdot 10^3-\frac{1}{30}\cdot 10-\left(\frac{77}{2}\right)^2$$

$$=25000+\frac{1000}{3}-\frac{1}{3}-\frac{5936}{4}$$

$$=\frac{9596}{4}\cdots\text{(答)}$$

(2)　$$s_{xy}=\sum_{n=1}^{10} n\cdot n^2-\overline{a}\cdot\overline{b}=3025-\frac{11}{2}\cdot\frac{77}{2}$$

$$=\frac{11253}{4}\cdots\text{(答)}$$

(3)　(左辺) − (右辺)

$$=\{(pr+qs)-(r+s)\overline{a}-(p+q)\overline{b}+2\overline{a}\overline{b}\}$$
$$-\{(ps+qr)-(r+s)\overline{a}-(p+q)\overline{b}+2\overline{a}\overline{b}\}$$
$$=(pr+qs)-(ps+qr)$$

$=p(r-s)+q(s-r)=(q-p)(s-r)$
>0【証明終】

(4) 数列$\{b_n\}$と$\{c_n\}$は項の順番を入れ替えたものなので，その平均および分散・標準偏差は等しい。
よって，(a_n, c_n)を組として扱ったときの相関係数が最小となるのは共分散が最小になるときである。
ここで(3)の結果より，(a_n, c_n)の組どうしを比較したときに，もし「$a_i<a_j$ かつ $c_i>c_j$」となる整数i, jが存在すればc_iとc_jを入れ替えたほうが共分散の値がより大きくなる。
よって，相関係数が最大となるのは
$c_1<c_2<\cdots<c_{10}$ すなわち$\{c_n\}$が$\{b_n\}$と一致するとき（入れ替えていないとき）である。【証明終】

$\boxed{4}$ 【解】

(1) $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$
$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$
よって
$T_1(x)=x$，$T_2(x)=2x^2-1$
$T_3(x)=4x^3-3x$ …㊟

(2) $\cos(n+2)\theta+\cos n\theta=2\cos(n+1)\theta\cos\theta$
が成立（和積の公式）。よって
$T_{n+2}(x)+T_n(x)=2T_{n+1}(x)\cdot x$
$T_{n+2}(x)=2xT_{n+1}(x)-T_n(x)$
となる。【証明終】

(3) $T_n(x)$の最高次の項は$2^{n-1}x^n$である …(＊)
と推測される。これがすべての正の整数nについて成立することをnについての数学的帰納法で示す。
(i) $n=1, 2$のとき
$T_1(x)$の最高次の項は$x=2^0x^1$
$T_2(x)$の最高次の項は$2x^2=2^1x^2$
であり正しい。
(ii) $n=k$，$k+1$のとき(＊)が成立したと仮定する。
$2xT_{k+1}(x)$の最高次の項は
$2x\cdot 2^{k-1}x^k=2^kx^{k+1}$
$T_k(x)$の最高次の項は$2^{k-1}x^k$
なので，(2)の結果より$T_{k+2}(x)$の最高次の項は2^kx^{k+1}である。これは$n=k+2$のときも(＊)が正しいことを表す。
以上，(i)(ii)より(＊)はすべての正の整数nについて正しい。よって$T_n(x)$の次数はnであり，最高次の項の係数は2^{n-1} …㊟

10月臨時増刊号では，愛知医科大学の数学を攻略しますので，ご期待ください！
全12校の掲載予定は以下のとおりとなっております。

第109回／4月号　東邦大学医学部
第110回／6月号　東京女子医科大学
第111回／6月号　金沢医科大学
第112回／8月号　岩手医科大学
第113回／8月号　北里大学医学部
第114回／10月号　日本大学医学部
第115回／10月号　聖マリアンナ医科大学
第116回／10月臨時増刊号　愛知医科大学
第117回／12月号　東京医科大学
第118回／12月号　杏林大学医学部
第119回／2月号　東京慈恵会医科大学
第120回／2月号　昭和大学医学部