東大螢雪会 医学部数学 攻略演習

マンツーマン指導で医歯薬学部に多くの合格者を輩出している「東大螢雪会」では，主要な私立大学医学部の予想問題を作成しています。このコーナーでは，「東大螢雪会」の作成した予想問題を用いて，主要な私立大学医学部の数学を攻略するための演習を行います。隔月刊で毎号２校分の演習を行い，全12校の連載となる予定です。

今月号１校目は，日本大学医学部の数学を攻略します！

第114回 日本大学医学部 編

東大螢雪会講師　上野 尚人

日本大学医学部の数学は，制限時間75分で大問５つが出題されます。大問１と大問２は４問ずつの小問集合（大学入試センター試験と同様のマークセンス式），大問３はマークセンス式の誘導がある大問，大問４および大問５は記述式です。今回の予想問題では７割程度の得点を目指してください。

1，2，3は，マークシートに解答を記入しなさい。ただし，分数は既約分数で答え，平方根を含む解答は平方根の中をできるだけ簡潔にして答えなさい。問題4，5は，「数学記述式問題解答用紙」に解答しなさい。

1

(1)　x の３次方程式 $x^3-ax^2+19x-b=0$ の解がすべて異なる正の整数であるとき，$a=$ **(1)**，$b=$ **(2)(3)** である。

(2)　複素数 z が $z^3+\dfrac{1}{z^3}=\sqrt{3}$ をみたすとき，z^n が実数となるような最小の正の整数 n の値は **(4)(5)** である。

(3)　１辺の長さが１の正六面体 ABCD-EFGH がある。この正六面体を，正方形の辺 AB を軸に１回転させたときの通過部分の体積は **(6)** π であり，正方形の対角線 AC を軸に１回転させたときの通過部分の体積は $\dfrac{\textbf{(7)}\sqrt{\textbf{(8)}}}{\textbf{(9)}}\pi$ である。

(4)　x の２次以下の多項式 $f(x)$ がある。任意の $f(x)$ に対して $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx=pf(0)+qf(1)+rf(2)$ をみたす定数 p, q, r の値は $p=\dfrac{\textbf{(10)}}{\textbf{(11)}}$，$q=\dfrac{\textbf{(12)}}{\textbf{(13)}}$，$r=\dfrac{\textbf{(14)}}{\textbf{(15)}}$ である。

2

(1) $N=2000^{20}$ とする。Nを20で割った余りは **(16)** であり，Nを101で割ったときの余りは **(17)(18)** である。よって N を2020で割ったときの余りは **(19)(20)(21)** である。

(2) xy 平面上の楕円 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，($a>0$, $b>0$) は，その全体が領域 $D:\dfrac{|x|}{4}+\dfrac{|y|}{3}\leqq 1$ に含まれている。このような楕円 E の面積の最大値は **(22)** π であり，面積が最大となるときの楕円 E の焦点の座標は $\left(\pm\dfrac{\sqrt{\textbf{(23)(24)}}}{\textbf{(25)}},\ 0\right)$ である。

(3) 正の整数 n に対して $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$ と定義する。$I_1=\dfrac{\textbf{(26)}}{\textbf{(27)}}\log\textbf{(28)}$，

$I_2=\textbf{(29)}-\dfrac{\textbf{(30)}}{\textbf{(31)}}\pi$ であり，$I_n+I_{n+2}=\dfrac{1}{n+\textbf{(32)}}$ である。

(4) 袋の中に A と書かれたカードが 5 枚，B と書かれたカードが 4 枚，C と書かれたカードが 3 枚入っている。この袋の中から 3 枚のカードを取り出すとき，「A が 1 枚，B が 2 枚」のように書かれたアルファベットが 2 種類である確率は $\dfrac{\textbf{(33)(34)}}{\textbf{(35)(36)}}$ である。

3 xy 平面上に 3 点 O(0, 0)，P(4, 0)，Q(0, 3) をとる。線分 OQ 上に点 A，線分 OP 上に点 B，線分 AB 上に点 C をとり，三角形 ABC が正三角形になるようにする。

(1) 点 A の座標を $(0, a)$，点 B の座標を $(b, 0)$ とする ($0<a<3$, $0<b<4$)。2 点 A, B および第 1 象限の点 C で正三角形 ABC ができるとき，点 C の座標は

$$\left(\frac{\sqrt{\textbf{(37)}}}{\textbf{(38)}}a+\frac{\textbf{(39)}}{\textbf{(40)}}b,\ \frac{\textbf{(41)}}{\textbf{(42)}}a+\frac{\sqrt{\textbf{(43)}}}{\textbf{(44)}}b\right)$$

である。この点 C が線分 AB 上にあるとき，等式

$$\left(\textbf{(45)}+\textbf{(46)}\sqrt{\textbf{(47)}}\right)a+\left(\textbf{(48)}+\textbf{(49)}\sqrt{\textbf{(50)}}\right)b=24$$ が成立する。

(2) 正三角形 ABC の面積は $\dfrac{\sqrt{\textbf{(51)}}}{\textbf{(52)}}(a^2+b^2)$ であり，この面積の最小値は

$$\frac{\textbf{(53)(54)}}{\textbf{(55)(56)(57)}}\left(\textbf{(58)(59)}\sqrt{\textbf{(60)}}-\textbf{(61)(62)}\right)$$ である。

4　無限数列$\{a_n\}$（$n=1, 2, 3, \ldots$）について，以下の問に答えなさい。ただし調和数列とは「各項の逆数が等差数列であるような数列」のことである。また各項の値は0ではない複素数とする。

(1)　等差数列でありかつ等比数列でもあるような$\{a_n\}$は存在するか。存在するときはその一般項を求め，存在しないときはその理由を示せ。

(2)　等比数列でありかつ調和数列でもあるような$\{a_n\}$は存在するか。存在するときはその一般項を求め，存在しないときはその理由を示せ。

(3)　等差数列でありかつ調和数列でもあるような$\{a_n\}$は存在するか。存在するときはその一般項を求め，存在しないときはその理由を示せ。

5

(1)　xy平面上の曲線$|x|^{\frac{1}{3}}+|y|^{\frac{1}{3}}=1 \cdots (*)$の概形を描け。

(2)　曲線$(*)$で囲まれた部分の面積を求めよ。

1　**【解】**

(1)　3次方程式の解を

$x=p, q, r$　$(1 \leqq p<q<r)$

とすると，解と係数の関係より

$p+q+r=a,\ pq+qr+rp=19,\ pqr=b$

となる。

$pq+qr+rp \geqq p^2+p^2+p^2$ より $19 \geqq 3p^2$

であり，これをみたす正の整数は$p=1, 2$に限られる。

- $p=1$のとき

$q+qr+r=19$ より $(q+1)(r+1)=20$

$q+1$，$r+1$はいずれも3以上の整数なので，この等式をみたす(q, r)の組は $q+1=4$，$r+1=5$ $\leftrightarrow$ $(q, r)=(3, 4)$のみである。

- $p=2$のとき

$2q+qr+2r=19$ より $(q+2)(r+2)=23$

$q+2$，$r+2$はいずれも5以上の整数なので，この等式をみたす組は存在しない。

以上より$(p, q, r)=(1, 3, 4)$であり

$a=8,\ b=12 \cdots$ **(1)**，**(2)(3)**

(2)　$(z^3)^2-\sqrt{3}\,z^3+1=0$

2次方程式の解の公式より

$$z^3=\frac{\sqrt{3}\pm i}{2}=\cos\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)$$

（複号同順）であり

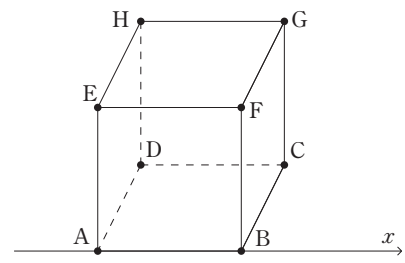
$$z=\cos\left(\pm\frac{\pi}{18}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{18}\right)$$

$$z^n=\cos\left(\pm\frac{\pi}{18}n\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{18}n\right)$$

である。これが実数になるのは$\frac{\pi}{18}n$がπの整数倍になるときであり，求める最小の正の整数は

$n=18 \cdots$ **(4)(5)**

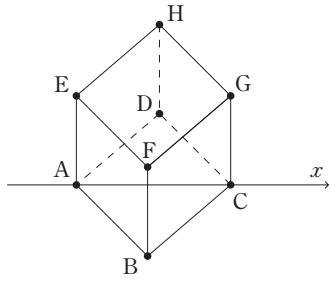
(3)　• AB を回転軸としたとき



半径$\sqrt{2}$の円を底面とした，高さ1の円柱なのでその体積は

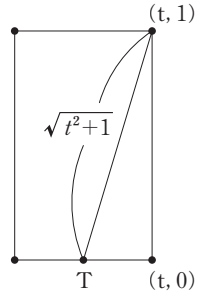
$\{\pi\cdot(\sqrt{2})^2\}\cdot 1=2\pi \cdots$ **(6)**

• AC を回転軸としたとき



AC を x 軸とし，A の x 座標を 0，C の x 座標を $\sqrt{2}$ とする。

できる立体は平面 BDHF に関して対称なので，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の区間の体積を求め，それを 2 倍すればよい。



回転させる前の立方体を平面 $x = t \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ で切ったときの断面は，

底辺 $2t$ 高さ 1 の長方形である。この長方形を点 $\mathrm{T}(t)$ を中心に 1 回転させると半径 $\sqrt{t^2+1}$ の円が現れる。

よって求める回転体の体積は

$$2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \pi(\sqrt{t^2+1})^2\, dt = 2\pi\left[\frac{t^3}{3}+t\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \frac{7\sqrt{2}}{6}\pi \cdots \frac{\boxed{(7)}\sqrt{\boxed{(8)}}}{\boxed{(9)}}$$

(4) $f(x) = ax^2+bx+c$ とおく。

$f(0) = c$，$f(1) = a+b+c$，

$f(2) = 4a+2b+c$

これを a, b, c について解いて

$$a = \frac{1}{2}\{f(0)-2f(1)+f(2)\}$$

$$b = \frac{1}{2}\{-3f(0)+4f(1)-f(2)\}$$

$$c = f(0)$$

よって

$$\int_0^2 f(x)\, dx = \left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right]_0^2$$

$$= \frac{8}{3}a+2b+c$$

$$= \frac{4}{3}\{f(0)-2f(1)+f(2)\}$$

$$+\{-3f(0)+4f(1)-f(2)\}+2f(0)$$

$$= \frac{1}{3}f(0)+\frac{4}{3}f(1)+\frac{1}{3}f(2)$$

$$\cdots \frac{\boxed{(10)}}{\boxed{(11)}}, \frac{\boxed{(12)}}{\boxed{(13)}}, \frac{\boxed{(14)}}{\boxed{(15)}}$$

2 【解】

(1) 2000は20の倍数なので，N を20で割ったときの余りは 0 … **(16)**

$N = 2000^{20} = 2^{20}\cdot 1000 = 2^{20}\cdot 10^{60}$

$= 1024^2\cdot 100^{30}$

以下，合同式は101を法とする。

$1024 \div 101 = 10$ あまり14より

$1024^2 \equiv 14^2 = 196 \equiv 95$

$100^{30} \equiv -1^{30} = 1$

よって

$N \equiv 95\cdot 1 = 95 \cdots$ **(17)(18)**

以上より，整数 a, b を用いて

$N = 20a$，$N = 101b+95$

$\Rightarrow 20a = 101b+95 \cdots ①$

と表される。1 次不定方程式①の解の 1 つ（特殊解）は $(a, b) = (30, 5)$ である。

$20a = 101b+95 \cdots ①$

$20\cdot 30 = 101\cdot 5+95 \cdots ②$

①−②より $20(a-30) = 101(b-5)$

20と101は互いに素なので，整数 k を用いて

$20(a-30) = 101(b-5) = 20\cdot 101\cdot k$ と表される。

よって 1 次不定方程式①の一般解は

$a = 30+101k$，$b = 5+20k$ となる。

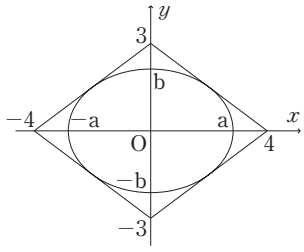
以上より $N = 600+2020k$ と表されるので，

N を2020で割ったときの余りは

600 … **(19)(20)(21)**

(2) 楕円 E および領域 D はいずれも x 軸，y 軸に関して対称である。

楕円 E の面積がなるべく大きくなるように，楕円 E が領域 D の境界線に接するときを考えればよい。



楕円 E の第1象限上の点

$(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ における接線の方程式は

$$\frac{(a\cos\theta)x}{a^2}+\frac{(b\sin\theta)x}{b^2}=1$$

$$\frac{(\cos\theta)x}{a}+\frac{(\sin\theta)x}{b}=1$$

これが $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}=1$ と一致するとき

$$\frac{\cos\theta}{a}=\frac{1}{4},\ \frac{\sin\theta}{b}=\frac{1}{3}$$

$$\cos\theta=\frac{a}{4},\ \sin\theta=\frac{b}{3}$$

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ に代入して

$$\frac{a^2}{16}+\frac{b^2}{9}=1\cdots(*)$$

ここで，楕円 E の面積は πab なので $(*)$ の条件下で ab が最大となるときを考えればよい。

$\dfrac{a^2}{16}$，$\dfrac{b^2}{9}$ はいずれも正なので，相加平均と相乗平均の大小関係より

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{16}+\frac{b^2}{9}\right)\geqq\sqrt{\frac{a^2}{16}\cdot\frac{b^2}{9}}$$

$$\frac{1}{2}\cdot 1\geqq\frac{a}{4}\cdot\frac{b}{3}$$

$$ab\leqq 6$$

等号成立は $\dfrac{a^2}{16}=\dfrac{b^2}{9}=\dfrac{1}{2}$ すなわち $a=2\sqrt{2}$，$b=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ のとき。

よって楕円 E の面積の最大値は 6π … **(22)**

$\pm\sqrt{a^2-b^2}=\pm\sqrt{\dfrac{7}{2}}=\pm\dfrac{\sqrt{14}}{2}$ より，このときの焦点の座標は

$$\left(\pm\frac{\sqrt{14}}{2},\ 0\right)\cdots\frac{\sqrt{\boxed{(23)(24)}}}{\boxed{(25)}}$$

(3) $$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{-(\sin x)'}{\cos x}\,dx$$

$$=\left[\log|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=-\left(\log\frac{1}{\sqrt{2}}-\log 1\right)$$

$$=\frac{1}{2}\log 2\cdots\frac{\boxed{(26)}}{\boxed{(27)}},\ \boxed{(28)}$$

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx$$

$$=\left[\tan x-x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=1-\frac{1}{4}\pi\cdots\boxed{(29)},\ \frac{\boxed{(30)}}{\boxed{(31)}}$$

$$I_n+I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x(1+\tan^2 x)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\cdot(\tan x)'\,dx$$

$$=\left[\frac{\tan^{n+1}x}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n+1}\cdots\boxed{(32)}$$

(4) すべてのカード12枚を区別すると，3枚のカードの選び方は

$${}_{12}\mathrm{C}_3=\frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1}=220\text{ 通り}$$

そのうち，アルファベットが1種類である選び方は「A が3枚」「B が3枚」「C が3枚」のいずれかであり

${}_5C_3+{}_4C_3+{}_3C_3=10+4+1=15$ 通り

また，アルファベットが3種類である選び方は「ABCが1枚ずつ」であり

${}_5C_1\cdot{}_4C_1\cdot{}_3C_1=5\cdot4\cdot3=60$ 通り

余事象で考えると，アルファベットが2種類である確率は

$$1-\frac{15+60}{220}=\frac{29}{44}\cdots\frac{\boxed{(33)(34)}}{\boxed{(35)(36)}}$$

3 【解】

(1) $\overrightarrow{AB}=(b,-a)$ を90°回転させたベクトルは $\vec{r}=(a,b)$ である。

AB の中点 $M\left(\frac{b}{2},\frac{a}{2}\right)$ を考えると

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{r}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b,\ \frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)$$

$$\cdots\frac{\sqrt{\boxed{(37)}}}{\boxed{(38)}},\frac{\boxed{(39)}}{\boxed{(40)}},\frac{\boxed{(41)}}{\boxed{(42)}},\frac{\sqrt{\boxed{(43)}}}{\boxed{(44)}}$$

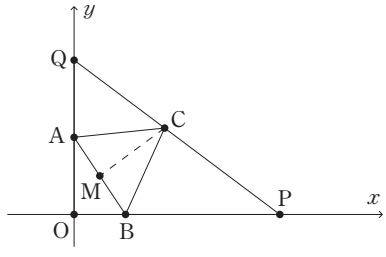
これが点 C の座標も表している。点 C の座標を，直線 AB の方程式 $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ に代入して

$$\frac{\sqrt{3}\,a+b}{8}+\frac{a+\sqrt{3}\,b}{6}=1$$

$$(4+3\sqrt{3})a+(3+4\sqrt{3})b=24$$

$$\cdots\boxed{(45)}+\boxed{(46)}\sqrt{\boxed{(47)}},$$

$$\boxed{(48)}+\boxed{(49)}\sqrt{\boxed{(50)}}$$



(2) 正三角形 ABC の1辺は $AB=\sqrt{a^2+b^2}$ なので，その面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2)\cdots\frac{\sqrt{\boxed{(51)}}}{\boxed{(52)}}$$

ここで $\vec{p}=(4+3\sqrt{3}+3+4\sqrt{3})$，$\vec{q}=(a,b)$ とおくと(1)の結果より

$$\vec{p}\cdot\vec{q}=24$$

この条件下で $|\vec{q}|=\sqrt{a^2+b^2}$ が最小となるのは $\vec{p}\ /\!/\ \vec{q}$ のときであり

$$|\vec{q}|^2=\frac{24^2}{|\vec{p}|^2}=\frac{576}{(4+3\sqrt{3})^2+(3+4\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{576}{100+48\sqrt{3}}=\frac{144}{25+12\sqrt{3}}$$

$$=\frac{144(25-12\sqrt{3})}{193}$$

よって面積の最小値は

$$\frac{\sqrt{3}}{4}|\vec{q}|^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{144(25-12\sqrt{3})}{193}$$

$$=\frac{36}{193}(25\sqrt{3}-36)$$

$$\cdots\frac{\boxed{(53)(54)}}{\boxed{(55)(56)(57)}}\left(\boxed{(58)(59)}\sqrt{\boxed{(60)}}-\boxed{(61)(62)}\right)$$

4 【解】

(1) $a_1=a$，$a_2=b$，$a_3=c$ とおく。等差中項，等比中項の条件より

$$a+c=2b\cdots①,\quad ac=b^2\cdots②$$

である。①より $b=\frac{a+c}{2}$ であり，②に代入して

$$ac=\frac{(a+c)^2}{4}\Leftrightarrow\frac{(a-c)^2}{4}=0\Leftrightarrow a=c$$

よって $a=b=c$ となり，数列 $\{a_n\}$ を等差数列とみるとその公差は0，等比数列とみるとその公比は1である。

また，公差0の等差数列および公比が1の等比数列はいずれも定数の列であり，これは何番目の項まで数えても等差数列でありかつ等比数列である。

よって求める数列は「すべて同じ数からなる列」……(答)

⑵　等比中項の条件，および逆数の列に対する等差中項の条件より

$$ac=b^2\cdots②,\ \frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}\cdots③$$

③の右辺は0でないので，両辺の逆数をとって

$$\frac{ac}{a+c}=\frac{b}{2}\ \text{より}\ b=\frac{2ac}{a+c}$$

これを②に代入して

$$ac=\frac{4a^2c^2}{(a+c)^2}$$

両辺を $ac(\neq 0)$ で割って

$$1=\frac{4ac}{(a+c)^2}\Rightarrow (a+c)^2-4ac=0$$

よって同様に定数の列とわかるので，求める数列は「すべて同じ数からなる列」……㊟

⑶　等差中項の条件，および逆数の列に対する等差中項の条件より

$$a+c=2b\cdots①,\ \frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}\cdots③$$

⑵と同様，③を変形して $b=\dfrac{2ac}{a+c}$

これを①に代入して

$$a+c=\frac{4ac}{a+c}\Rightarrow (a+c)^2=4ac$$

$$\therefore a=c$$

よって同様に定数の列とわかるので，求める数列は「すべて同じ数からなる列」……㊟

5　【解】

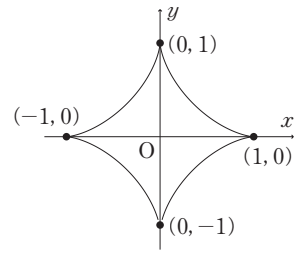
⑴　与えられた式は x を $-x$ に変えても y を $-y$ に変えても成立するので，x 軸および y 軸に関して対称である。よって $x\geqq 0$ かつ $y\geqq 0$ の範囲で図形を調べて，軸に関して対称移動させればよい。

$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$ の範囲で曲線 $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}=1$ を考える。

この曲線は2点$(1,0)$，$(0,1)$を通る。また，曲線の式を変形して

$$y^{\frac{1}{3}}=1-x^{\frac{1}{3}}\Rightarrow y=\left(1-x^{\frac{1}{3}}\right)^3$$

かっこの中は単調減少なので，全体としても単調減少。よってグラフの概形は図のようになる。



⑵　$4\displaystyle\int_0^1\left(1-x^{\frac{1}{3}}\right)^3dx=4\int_0^1\left(1-3x^{\frac{1}{3}}+3x^{\frac{2}{3}}-x\right)dx$

$$=4\left[x-\frac{9}{4}x^{\frac{4}{3}}+\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=4\left(1-\frac{9}{4}+\frac{9}{5}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{10}\cdots\ \text{……㊟}$$

10月臨時増刊号では，愛知医科大学の数学を攻略しますので，ご期待ください！

全12校の掲載予定は以下のとおりとなっております。

第109回／4月号　東邦大学医学部
第110回／6月号　東京女子医科大学
第111回／6月号　金沢医科大学
第112回／8月号　岩手医科大学
第113回／8月号　北里大学医学部
第114回／10月号　日本大学医学部
第115回／10月号　聖マリアンナ医科大学
第116回／10月臨時増刊号　愛知医科大学
第117回／12月号　東京医科大学
第118回／12月号　杏林大学医学部
第119回／2月号　東京慈恵会医科大学
第120回／2月号　昭和大学医学部