東大螢雪会 **医 学 部 数 学** 攻略演習

マンツーマン指導で医歯薬学部に多くの合格者を輩出している「東大螢雪会」では，主要な私立大学医学部の予想問題を作成しています。このコーナーでは，「東大螢雪会」の作成した予想問題を用いて，主要な私立大学医学部の数学を攻略するための演習を行います。隔月刊で毎号２校分の演習を行い，全12校の連載となる予定です。

今月号２校目は，北里大学医学部の数学を攻略します！

第113回　北里大学医学部 編

東大螢雪会講師　上野 尚人

北里大学医学部の数学は，制限時間80分で大問３つが出題されます。大問１は客観式（答えのみ記入）の小問集合，大問２および大問３は記述式です。今回の予想問題では６割程度の得点を目指してください。

注意事項：2，3は，解答の過程を必ず記すこと。

1　次の各文の $\boxed{}$ にあてはまる答を求めよ。

(1)　次の $\boxed{（ア）}$ に当てはまるものを，下の①～④の中から選べ。

> 三角形 ABC の外心を O，内心を I とする。O と I が一致することは，ABC が正三角形であるための $\boxed{（ア）}$。
>
> ①　必要十分条件である
> ②　必要条件であるが，十分条件ではない
> ③　十分条件であるが，必要条件ではない
> ④　必要条件でも十分条件でもない

(2)　x の 2 次方程式 $x^2-ax+b=0$ を考える。この方程式の 2 つの解が実数 θ を用いて $x=\cos^3\theta$，$\sin^3\theta$ と表されるとき，a^2 を b で表すと $a^2=\boxed{（イ）}\,b-\boxed{（ウ）}\,b^{\frac{2}{3}}+\boxed{（エ）}$ である。

(3)　xy 平面上の図形 $F:|x|+|y|=1$ を考える。図形 F 上の点 $\mathrm{P}(x,\,y)$ に対して，複素数 $z=(x+yi)^2$（i は虚数単位）が複素数平面上で表す点を $\mathrm{Q}(z)$ とする。点 P が図形 F 上をくまなく動くとき，点 Q が描く閉曲線によって囲まれる部分の面積は $\dfrac{\boxed{（オ）}}{\boxed{（カ）}}$ である。

(4)　1から20までの整数が書かれたカードが1枚ずつ，全部で20枚ある。この20枚のカードから同時に3枚を選び，カードに書かれた数字を小さい方から順に a, b, c とする。$b-a \geqq 2$ かつ $c-b \geqq 2$ となる確率は $\dfrac{\boxed{(キ)(ク)}}{\boxed{(ケ)(コ)}}$ である。

(5)　a を正の数とし，関数 $f(x)$ を

$$\begin{cases} f(x)=x^a \sin \dfrac{1}{x} \ (x \neq 0) \\ f(0)=0 \end{cases}$$

と定義する。$x=0$ の前後で $f(x)$ が連続となるのは $a>\boxed{(サ)}$ のときであり，$f(x)$ が $x=0$ で微分可能となるのは $a>\boxed{(シ)}$ のときである。

2　$\alpha=1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ とする。

(1)　$f(\alpha)=0$ をみたす x の3次式 $f(x)$ で，x^3 の係数が1であるものを求めよ。

(2)　(1)で求めた $f(x)$ に対し，x の3次方程式 $f(x)=0$ を考える。この方程式の α 以外の解は

$$\beta=1+\sqrt[3]{2}\,\omega+\sqrt[3]{4}\,\omega^2,\ \gamma=1+\sqrt[3]{2}\,\omega^2+\sqrt[3]{4}\,\omega$$

となることを示せ。ただし ω は $\omega^3=1$ をみたす虚数とする。

(3)　(2)で求めた β, γ に対し，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n=\alpha^n+\beta^n+\gamma^n \ (n=1, 2, 3, \ldots)$$

で定義する。$\{a_n\}$ の各項はすべて正の整数であることを示せ。

3　3辺の長さが a, b, c の三角形 T がある。三角形 T の面積を S，三角形 T の外接円の半径を R，三角形 T の内接円の半径を r とする。

(1)　ヘロンの公式

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \ (2s=a+b+c)$$

を示せ。

(2)　$R=\dfrac{abc}{4S}$，$r=\dfrac{2S}{a+b+c}$

を示せ。

(3)　$x=a+b-c,\ y=b+c-a,\ z=c+a-b$ として，$\dfrac{R}{r}$ を x, y, z で表せ。また不等式 $\dfrac{R}{r} \geqq 2$ が成立し，等号が成立するのは T が正三角形のときのみであることを示せ。

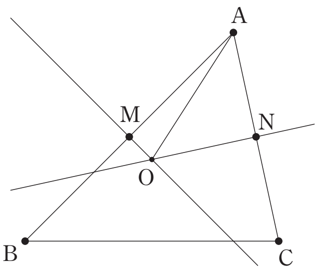
$\boxed{1}$ 【解】

(1) 条件 p:「三角形 ABC の外心 O と内心 I が一致する」

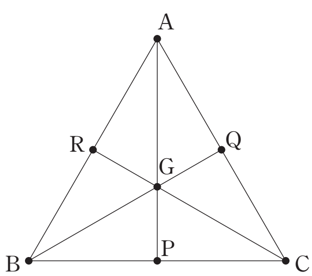
条件 q:「ABC が正三角形である」

命題「p ならば q」の真偽について:外心は各辺の垂直二等分線の交点,内心は角の二等分線の交点である。

外心 O は,辺 AB の垂直二等分線と辺 AC の垂直二等分線の交点である。AB の中点を M, AC の中点を N とすると OM⊥AB,ON⊥AC が成立。O と I が一致するとき,AO は角 A の二等分線となっているので ∠OAM=∠OAN が成立。よって △OAM≡△OAN である(直角三角形どうしで角の大きさが一致するので相似,かつ OA 共通より合同)。よって AM=AN より AB=AC といえる。同様に BC の長さも同じとわかるので ABC は正三角形であり,この命題は真である。



命題「q ならば p」の真偽について:ABC が正三角形であるとき,辺 BC の中点を P,辺 CA の中点を Q,辺 AB の中点を R とすると AP⊥BC, BQ⊥CA,CR⊥AB が成立。AP, BQ, CR の交点が重心 G であるが,GA=GB=GC が成立するため G は外心 O と一致。また GP⊥BC, GQ⊥CA,GR⊥AB より G は内心 I と一致。よって O と I は一致するのでこの命題は真である。



以上より,p は q であるための必要十分条件である。①…… $\boxed{(ア)}$

(垂心を H とすると,正三角形において 4 点 O, I, G, H は一致。逆に O, I, G, H のうち 2 つが一致すれば正三角形といえる)

(2) 2 次方程式の解と係数の関係より

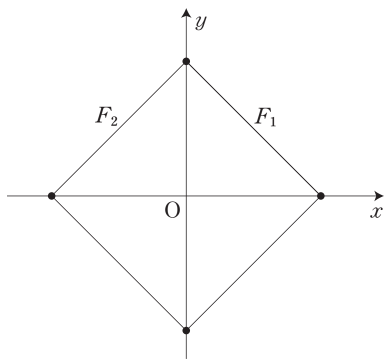
$$a=\cos^3\theta+\sin^3\theta,\ b=\cos^3\theta\sin^3\theta$$

であり

$$\begin{aligned}a^2&=\cos^6\theta+\sin^6\theta+2\cos^3\theta\sin^3\theta\\&=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^3\\&\qquad-3\cos^2\theta\sin^2\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\\&\qquad+2\cos^3\theta\sin^3\theta\\&=1^3-3b^{\frac{2}{3}}\cdot1+2b=2b-3b^{\frac{2}{3}}+1\end{aligned}$$

…… $\boxed{(イ)}$, $\boxed{(ウ)}$, $\boxed{(エ)}$

(3) まず図形 F のうち領域 $x\geqq0$ かつ $y\geqq0$ に属する部分 F_1 を考える。



F_1 は線分 $x+y=1\ (0\leqq x\leqq1)$ であり,点 P がこの線分上にあるとき実数 $t\,(0\leqq t\leqq1)$ を用いて $(x,y)=(t,1-t)$ と表され

$$\begin{aligned}z&=\{t+(1-t)i\}^2\\&=\{t^2-(1-t)^2\}+2t(1-t)i\\&=(2t-1)+(-2t^2+2t)i\end{aligned}$$

となる。この実部を X,虚部を Y とすると

$X=2t-1$ …①

$Y=-2t^2+2t$ …②

$0\leqq t\leqq1$ …③

となる。①より $t=\dfrac{X+1}{2}$ でありこれを②に

代入すると

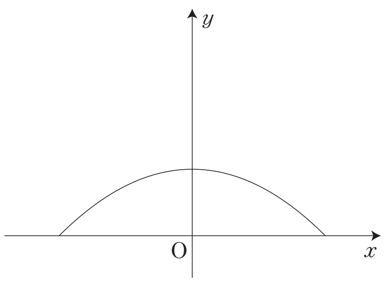
$$Y=-2\left(\frac{X+1}{2}\right)^2+2\cdot\frac{X+1}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}X^2+\frac{1}{2}$$

また，③に代入すると

$$0\leqq\frac{X+1}{2}\leqq 1 \Leftrightarrow -1\leqq X\leqq 1$$

よって，点 P が図形 F_1 上をくまなく動くときに点 Q が描く図形は「放物線 $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$ のうち $-1\leqq x\leqq 1$ をみたす部分 …(*)」である。



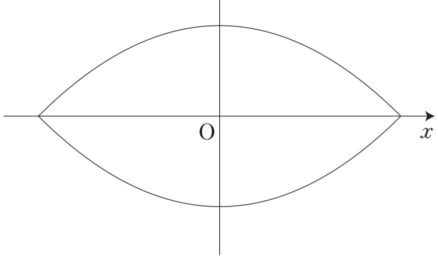
図形 F のうち領域 $x\leqq 0$ かつ $y\geqq 0$ をみたす部分を F_2 とすると，F_2 は F_1 を原点中心に $\frac{\pi}{2}$ 回転させた図形。よって，点 P が図形 F_2 上をくまなく動くときに点 Q が描く図形は「(*) を原点中心に π 回転させたもの …(**)」である。

（$z=(x+yi)^2$ の式よりド・モアブルの定理で考えると，回転角は 2 倍となる）

よって点 Q が最終的に描く図形は「(*) と (**) をあわせたもの」であり，囲まれる面積は

$$2\int_{-1}^{1}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)dx$$

$$=(-1)\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)\,dx$$



(4)　3 枚のカードの選び方は全部で ${}_{20}\mathrm{C}_3$ 通りであり，これらの確率はすべて等しい。

このうち，条件をみたす a, b, c の選び方を考える。

$A=a, B=b-1, C=c-2$ として

$$1\leqq A<B<C\leqq 18 \cdots ①$$

①をみたす (A, B, C) に対して，与えられた条件をみたす (a, b, c) は 1 対 1 で対応する。(A, B, C) の選び方は ${}_{18}\mathrm{C}_3$ 通りなので，求める確率は

$$\frac{{}_{18}\mathrm{C}_3}{{}_{20}\mathrm{C}_3}=\frac{\frac{18\cdot17\cdot16}{3\cdot2\cdot1}}{\frac{20\cdot19\cdot18}{3\cdot2\cdot1}}$$

$$=\frac{18\cdot17\cdot16}{20\cdot19\cdot18}=\frac{17\cdot16}{20\cdot19}=\frac{68}{95}$$

$$\cdots\frac{\boxed{(キ)(ク)}}{\boxed{(ケ)(コ)}}$$

(5)　f が $x=0$ で連続となるのは

$\lim_{x\to0}f(x)=0\cdots$(*) が成立するとき。$x\neq0$ において

$$|f(x)|=|x^a|\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqq|x^a|$$

なので，(*) が成立するのは

$\lim_{x\to0}x^a=0$ すなわち

$a>0\cdots\boxed{(サ)}$ のとき。

f が $x=0$ で微分可能となるのは

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0\cdots$(**) が成立するとき。

$x\neq0$ において

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|=|x^{a-1}|\left|\sin\frac{1}{x}\right|$$

$$\leqq|x^{a-1}|$$

なので，(**) が成立するのは

$\lim_{x\to0}x^{a-1}=0$ すなわち

$a>1\cdots\boxed{(シ)}$ のとき。

$\boxed{2}$ 【解】

(1) $k=\sqrt[3]{2}$ とする。$k^3=2$ であり，

$\alpha=1+k+k^2 \Leftrightarrow \alpha-1=k+k^2$ である。よって

$$\begin{aligned}(\alpha-1)^2&=(k+k^2)^2=k^2+2k^3+k^4\\&=k^2+4+2k=4+2k+k^2\\(\alpha-1)^3&=(k+k^2)^3=\{k(1+k)\}^3\\&=k^3(1+k)^3=k^3(1+3k+3k^2+k^3)\\&=2(1+3k+3k^2+2)=6(1+k+k^2)\end{aligned}$$

より

$$(\alpha-1)^3=6\alpha \Leftrightarrow \alpha^3-3\alpha^2-3\alpha-1=0$$

よって求める3次の多項式は

$$f(x)=x^3-3x^2-3x-1 \cdots\cdots (答)$$

(2) $$\omega^3=1 \Leftrightarrow \omega^3-1=0 \Leftrightarrow (\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$$

が成立。ω は虚数なので $\omega-1\neq0$ であり

$$\omega^2+\omega+1=0$$

とわかる。よって(1)と同様に

$$\begin{aligned}(\beta-1)^3&=(k\omega+k^2\omega^2)^3=(k\omega)^3(1+k\omega)^3\\&=(k\omega)^3(1+3k\omega+3k^2\omega^2+k^3\omega^3)\\&=2(1+3k\omega+3k^2\omega^2+2)\\&=6(1+k\omega+k^2\omega^2)=6\beta\\(\gamma-1)^3&=(k\omega^2+k^2\omega)^3=(k\omega)^3(\omega+k)^3\\&=(k\omega)^3(\omega^3+3\omega^2k+3\omega k^2+k^3)\\&=2(1+3k\omega^2+3k^2\omega+2)\\&=6(1+k\omega^2+k^2\omega)=6\gamma\end{aligned}$$

が成立。よって α,β,γ はいずれも

$x^3-3x^2-3x-1=0$ の解である。

【証明終】

(3) n を正の整数として，数列 $\{a_n\}$ についての漸化式をつくると

$$\begin{aligned}&\alpha^3=3\alpha^2+3\alpha+1\\&\Rightarrow \alpha^{n+3}=3\alpha^{n+2}+3\alpha^{n+1}+\alpha^n\\&\beta^3=3\beta^2+3\beta+1\\&\Rightarrow \beta^{n+3}=3\beta^{n+2}+3\beta^{n+1}+\beta^n\\&\gamma^3=3\gamma^2+3\gamma+1\\&\Rightarrow \gamma^{n+3}=3\gamma^{n+2}+3\gamma^{n+1}+\gamma^n\end{aligned}$$

この式を辺ごとに加えて

$$\begin{aligned}&\alpha^{n+3}+\beta^{n+3}+\gamma^{n+3}\\&=3(\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}+\gamma^{n+2})\\&\quad+3(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}+\gamma^{n+1})+(\alpha^n+\beta^n+\gamma^n)\end{aligned}$$

$$a_{n+3}=3a_{n+2}+3a_{n+1}+a_n \cdots ①$$

3次方程式の解と係数の関係より

$$\alpha+\beta+\gamma=3,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3,\ \alpha\beta\gamma=1$$

となるので

$$\begin{aligned}a_1&=\alpha+\beta+\gamma=3\\a_2&=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\\&=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=15\\a_3&=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\\&=(\alpha+\beta+\gamma)((\alpha+\beta+\gamma)^2\\&\qquad-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha))+3\alpha\beta\gamma=57\end{aligned}$$

である。最初の3項が正の整数であるので，漸化式①を用いることにより数列 $\{a_n\}$ のすべての項は正の整数であるといえる。

【証明終】

$\boxed{3}$ 【解】

(1) a, b にはさまれた角を θ とすると，余弦定理より

$$\cos\theta=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

ここで，三角形の面積は $S=\dfrac{1}{2}ab\sin\theta$ なので

$$\begin{aligned}4S^2&=a^2b^2\sin^2\theta=a^2b^2(1-\cos^2\theta)\\&=a^2b^2(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)\\&=a^2b^2\,\frac{a^2+2ab+b^2-c^2}{2ab}\cdot\frac{-a^2+2ab-b^2+c^2}{2ab}\\&=\frac{1}{4}((a+b)^2-c^2)(-(a-b)^2+c^2)\\&=\frac{1}{4}(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)\\&=\frac{1}{4}\cdot2s(2s-2c)(2s-2b)(2s-2a)\\&=4s(s-a)(s-b)(s-c)\end{aligned}$$

よって $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ といえる。

【証明終】

(2) 正弦定理より

$$\frac{c}{\sin\theta}=2R \Leftrightarrow \sin\theta=\frac{c}{2R}$$

よって

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta=\frac{abc}{4R} \Leftrightarrow R=\frac{abc}{4S}$$

といえる。

また，三角形Tの内心から各頂点までの線分を結び三角形Tを3分割することで

$$S=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr \Leftrightarrow r=\frac{2S}{a+b+c}$$

といえる。

【証明終】

(3)　(1)(2)の結果より

$$\frac{R}{r}=\frac{abc}{4S}\cdot\frac{a+b+c}{2S}=\frac{abc(a+b+c)}{8S^2}$$

$$=\frac{abc\cdot 2s}{8s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\frac{2abc}{(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)}$$

$$=\frac{2abc}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$$

ここで $z+x=2a$ より $a=\frac{z+x}{2}$

同様にして $b=\frac{x+y}{2}$, $c=\frac{y+z}{2}$

$$\frac{R}{r}=\frac{2\cdot\frac{z+x}{2}\cdot\frac{x+y}{2}\cdot\frac{y+z}{2}}{xyz}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{(z+x)(x+y)(y+z)}{xyz}$$

三角形の成立条件より x, y, z はすべて正の数である。相加平均と相乗平均の大小関係より

$$\frac{z+x}{2}\geqq\sqrt{zx},\ \frac{x+y}{2}\geqq\sqrt{xy},\ \frac{y+z}{2}\geqq\sqrt{yz}$$

この3つの不等式の各辺は正なので，辺ごとにかけて

$$\frac{(z+x)(x+y)(y+z)}{8}\geqq xyz$$

(等号成立は $x=y=z$ のとき)

この両辺に $\frac{2}{xyz}$ (>0) をかけて

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{(z+x)(x+y)(y+z)}{xyz}\geqq 2$$

$$\therefore\ \frac{R}{r}\geqq 2$$

【証明終】

等号成立は $x=y=z$ すなわち $a=b=c$ のとき。よって等号が成立するのはTが正三角形のときのみである。【証明終】

【受験生へのアドバイス】

2014年度までの旧課程入試では数学Ⅲ・数学Cからの出題の比重が重い大学でした。現課程になってからも数学Ⅲの出題が多く，客観式問題・記述式問題をとわず計算量が多いのも特徴です。

10月号では，日本大学医学部と聖マリアンナ医科大学の数学を攻略しますので，ご期待ください！

全12校の掲載予定は以下のとおりとなっております。

第109回／4月号　東邦大学医学部
第110回／6月号　東京女子医科大学
第111回／6月号　金沢医科大学
第112回／8月号　岩手医科大学
第113回／8月号　北里大学医学部
第114回／10月号　日本大学医学部
第115回／10月号　聖マリアンナ医科大学
第116回／12月号　愛知医科大学
第117回／12月号　東京医科大学
第118回／2月号　杏林大学医学部
第119回／2月号　東京慈恵会医科大学
第120回／2月号　昭和大学医学部