東大螢雪会 医学部数学 攻略演習

マンツーマン指導で医歯薬学部に多くの合格者を輩出している「東大螢雪会」では，主要な私立大学医学部の予想問題を作成しています。このコーナーでは，「東大螢雪会」の作成した予想問題を用いて，主要な私立大学医学部の数学を攻略するための演習を行います。隔月刊で毎号２校分の演習を行い，全12校の連載となる予定です。

今月号１校目は，岩手医科大学の数学を攻略します！

第112回 岩手医科大学 編

東大螢雪会講師　上野 尚人

岩手医科大学の数学は，制限時間60分で大問３つが出題されます。解答方式は大学入試センター試験と同様「桁数指定のマークセンス方式」です。第１問は小問集合，第２問および第３問は誘導のついた大問になっています。出題量が多く素早い処理を要求されます。今回の予想問題では６割程度の得点を目指してください。

$\boxed{1}$

問１　$y = xe^x\ (x \geqq 0)$ の逆関数を $f(x)$ とするとき，

$$f'(e) = \frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}\,e} \text{ であり } f''(e) = \frac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オ}\,e^2} \text{ である。}$$

問２　x の４次式 $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$ が任意の x に対し $f(x) - f(x-1) = 4x^3$ をみたすとき，

$a = \boxed{カ}$，$b = \boxed{キ}$，$c = \boxed{ク}$，$d = \boxed{ケ}$ である。

このとき $\int_{x-1}^{x} f(t)\,dt = x^4 + C$（$C$ は定数）が成立する。C の値を求めることで

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{\boxed{コ}}n^5 + \frac{1}{\boxed{サ}}n^4 + \frac{1}{\boxed{シ}}n^3 - \frac{1}{\boxed{スセ}}n \text{ とわかる。}$$

問３　６個の球を３つの箱に分けて入れる方法を考える。球が入らない箱があってもよい。

・球にも箱にも区別をつけない場合，その入れ方は $\boxed{ソ}$ 通り

・球には区別をつけず，箱には区別をつける場合，その入れ方は $\boxed{タチ}$ 通り

・球には区別をつけて，箱には区別をつけない場合，その入れ方は $\boxed{ツテト}$ 通り

・球にも箱にも区別をつける場合，その入れ方は $\boxed{ナニヌ}$ 通り

である。

$\boxed{2}$ すべての正の整数 n に対し，次の命題が真であることを示したい。

> 命題：$\alpha=\cos\dfrac{1}{9}\pi$，$\beta=\cos\dfrac{5}{9}\pi$，$\gamma=\cos\dfrac{7}{9}\pi$ としたとき，$2^n(\alpha^n+\beta^n+\gamma^n)$ の値は正の整数である。

次の問い（問１～問３）に答えよ。

問１　三角関数の３倍角の公式 $\cos 3\theta=\boxed{\text{ア}}\cos^3\theta-\boxed{\text{イ}}\cos\theta$ を用いることで，α, β, γ は，x の３次方程式

$$\boxed{\text{ウ}}\,x^3-\boxed{\text{エ}}\,x-1=0$$

の異なる３つの実数解であるとわかる。

問２　$a_n=2^n(\alpha^n+\beta^n+\gamma^n)\ (n=1, 2, 3, \dots)$

とおく。$a_1=\boxed{\text{オ}}$，$a_2=\boxed{\text{カ}}$，$a_3=\boxed{\text{キ}}$ である。

問３　問１，問２の結果より，数列 $\{a_n\}$ は漸化式

$$a_{n+3}=\boxed{\text{ク}}\,a_{n+1}+a_n$$

をみたすことがわかる。またその最初の３つの項が正の整数であることから，この数列の項はすべて正の整数であることがいえる。

$\boxed{3}$ xy 平面において，媒介変数表示

$$(x, y)=\left(1-\frac{1}{n}\right)(\cos\theta, \sin\theta)+\frac{1}{n}(\cos(1-n)\theta, \sin(1-n)\theta)$$

で表される点 $\mathrm{P}(x, y)$ を考える。n は２以上の整数とする。このとき，次の問い（問１～問２）に答えよ。

問１　$n=\boxed{\text{ア}}$ の場合，$0\leqq\theta\leqq 2\pi$ の範囲で θ が変化するときに点 P のえがく図形は線分となり，その長さは $\boxed{\text{イ}}$ である。

問２　$n=4$ のとき，$(x, y)=(\cos^{\boxed{\text{ウ}}}\theta, \sin^{\boxed{\text{エ}}}\theta)$ と変形できる。よって $0\leqq\theta\leqq 2\pi$ の範囲で θ が変化するときに点 P がえがく曲線の長さは $\boxed{\text{オ}}$ である。

$\boxed{1}$ **【解】**

問１　対象となる逆関数を $y=f(x)$ とおくと

$$x=ye^y$$

となる。$x=e$ に対応する y の値は $y=1$ である。

両辺を y で微分して

$$\frac{dx}{dy}=(y+1)e^y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y+1}e^{-y}\cdots\cdots①$$

この式に $y=1$ を代入することで

$$f'(e)=\frac{1}{2}e^{-1}=\frac{1}{2e}\cdots\cdots\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}}$$

また，①を x で微分して

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$=\frac{dy}{dx}\cdot\left(\frac{1}{y+1}e^{-y}\right)'$$

$$=\frac{dy}{dx}\cdot\left(-\frac{1}{(y+1)^2}e^{-y}+\frac{1}{y+1}\cdot(-1)e^{-y}\right)$$

$$=\frac{1}{y+1}e^{-y}\cdot\left(-\frac{y+2}{(y+1)^2}e^{-y}\right)$$

$$=-\frac{y+2}{(y+1)^3}e^{-2y}$$

これに $y=1$ を代入して

$$f''(e)=-\frac{3}{8}e^{-2}=\frac{-3}{8e^2}\cdots\cdots\boxed{\text{ウエ}},\boxed{\text{オ}}$$

問 2　$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx$

$f(x-1)=a(x-1)^4+b(x-1)^3+c(x-1)^2+d(x-1)$

この 2 式を左辺どうし，右辺どうし引いて

$$f(x)-f(x-1)$$
$$=a(4x^3-6x^2+4x-1)+b(3x^2-3x+1)+c(2x-1)+d$$
$$=4ax^3+(-6a+3b)x^2+(4a-3b+2c)x+(-a+b-c+d)$$

これと $4x^3$ の係数を比較して

$a=1,\ b=2,\ c=1,\ d=0$

$\cdots\cdots\boxed{\text{カ}},\boxed{\text{キ}},\boxed{\text{ク}},\boxed{\text{ケ}}$

$\int_{x-1}^{x}f(t)\,dt=x^4+C$ が成立。$x=k$ として

$$\int_{k-1}^{k}f(t)\,dt=k^4+C$$

$$\Leftrightarrow\ k^4=\int_{k-1}^{k}f(t)\,dt-C$$

両辺の $k=1$ から $k=n$ までの和をとって

$$\sum_{k=1}^{n}k^4=\int_0^n f(t)\,dt-Cn$$

$$=\int_0^n(t^4+2t^3+t^2)\,dt-Cn$$

$$=\left[\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{2}t^4+\frac{1}{3}t^3\right]_0^n-Cn$$

$$=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-Cn$$

$n=1$ のときこの和が 1 に等しいことから

$C=\dfrac{1}{30}$ が得られる。よって

$$\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n$$

$\cdots\cdots\boxed{\text{コ}},\boxed{\text{サ}},\boxed{\text{シ}},\boxed{\text{スセ}}$

問 3
- 球にも箱にも区別をつけない場合，箱に入る個数のみで考えて

  $(0,0,6),(0,1,5),(0,2,4),(0,3,3),$
  $(1,1,4),(1,2,3),(2,2,2)$

  の 7 通り………$\boxed{\text{ソ}}$

- 球には区別をつけず箱には区別をつける場合，球 6 個（記号○で表す）と箱 3 つを仕切る線 2 つ（記号｜で表す）の並べ方と考える。すなわち，「○ 6 個と｜2 個の『同じものを含む順列』」とみなして

  $\dfrac{8!}{6!2!}=28$ 通り………$\boxed{\text{タチ}}$

- まず球にも箱にも区別をつけて考える。入れ方の総数は $3^6=729$ 通り。このうち，
- ・空き箱が 2 つできるような入れ方の総数は 3 通り……①
- ・空き箱が 1 つまたは空き箱なしとなるような入れ方の総数は $729-3=726$ 通り……②
- ・箱に区別をつけない場合，①は 3 通りを 1 通りに同一視し，②は $3!=6$ 通りを 1 通りに同一視する。よって求める入れ方の総数は

  $3\div3+726\div6=122$ 通り

  ………$\boxed{\text{ツテト}}$

- 球にも箱にも区別をつける場合の入れ方の総数は

  $3^6=729$ 通り………$\boxed{\text{ナニヌ}}$

$\boxed{2}$ **【解】**

問 1　三角関数の加法定理および 2 倍角の公式は知っているものとして

$\cos 3\theta=\cos(2\theta+\theta)$

$=\cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta$

$=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2\cos\theta\sin^2\theta$

$=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2\cos\theta(1-\cos^2\theta)$

$=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ ……… $\boxed{ア}$, $\boxed{イ}$

ここで

$$\cos\left(3\cdot\frac{1}{9}\right)\pi=\cos\frac{1}{3}\pi=\frac{1}{2}$$

より $4\alpha^3-3\alpha=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 8\alpha^3-6\alpha-1=0$

$(\Leftrightarrow 8\alpha^3=6\alpha+1)$

が成立。β,γ についても同様。よって，α,β,γ は，x の 3 次方程式

$8x^3-6x-1=0$ …… $\boxed{ウ}$, $\boxed{エ}$

の解でありこの 3 つはすべて互いに異なる実数値である。

問 2　3 次方程式の解と係数の関係より

$$\alpha+\beta+\gamma=0,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-\frac{3}{4},$$

$$\alpha\beta\gamma=\frac{1}{8}$$

が成立するので

$a_1=2(\alpha+\beta+\gamma)=0$ …… $\boxed{オ}$

$a_2=2^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$

$=4((\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha))$

$=6$ …… $\boxed{カ}$

$a_3=2^3(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)=8\alpha^3+8\beta^3+8\gamma^3$

$=(6\alpha+1)+(6\beta+1)+(6\gamma+1)=3$

…… $\boxed{キ}$

問 3　$8\alpha^3=6\alpha+1\Rightarrow$

$2^{n+3}\alpha^{n+3}=3\cdot 2^{n+1}\alpha^{n+1}+2^n\alpha^n$

β,γ についても同様の等式が立つので

$2^{n+3}\alpha^{n+3}=3\cdot 2^{n+1}\alpha^{n+1}+2^n\alpha^n,$

$2^{n+3}\beta^{n+3}=3\cdot 2^{n+1}\beta^{n+1}+2^n\beta^n,$

$2^{n+3}\gamma^{n+3}=3\cdot 2^{n+1}\gamma^{n+1}+2^n\gamma^n$

各辺ごとに加えて

$2^{n+3}(\alpha^{n+3}+\beta^{n+3}+\gamma^{n+3})$

$=3\cdot 2^{n+1}(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}+\gamma^{n+1})$

$+2^n(\alpha^n+\beta^n+\gamma^n)$

よって，漸化式

$a_{n+3}=3a_{n+1}+a_n$ …… $\boxed{ク}$

が成立。a_1, a_2, a_3 が整数であることからこの数列の各項はすべて正の整数といえる。

$\boxed{3}$ **【解】**

問 1　$n=2$ …… $\boxed{ア}$ のとき，点 P の座標は

$$(x,y)=\frac{1}{2}(\cos\theta,\sin\theta)$$

$$+\frac{1}{2}(\cos\theta,-\sin\theta)$$

$=(\cos\theta,0)$

となる。$0\leqq\theta\leqq 2\pi$ の範囲で θ が変化するとき，点 P の軌跡は

線分 $y=0\ (-1\leqq x\leqq 1)$

となり，その長さは 2 …… $\boxed{イ}$ となる。n が 2 以外の値の場合，θ の三角関数と $(n-1)\theta$ の三角関数の和は 1 次式の関係にならず直線の一部をえがくことはない。

問 2　$n=4$ のとき，点 P の座標は

$$(x,y)=\frac{3}{4}(\cos\theta,\sin\theta)$$

$$+\frac{1}{4}(\cos 3\theta,-\sin 3\theta)$$

となる。ここで，三角関数の 3 倍角の公式

$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta,$

$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

を用いて

$(x,y)=(\cos^3\theta,\sin^3\theta)$

…… $\boxed{ウ}$, $\boxed{エ}$

と変形できる。（アステロイドをえがく）

この曲線の長さ L は

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

で求められる。

$$\frac{dx}{dt}=3\cos^2\theta\cdot(-\sin\theta),$$

$$\frac{dy}{dt}=3\sin^2\theta\cdot\cos\theta$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=9\cos^4\theta\sin^2\theta$$
$$+9\sin^4\theta\cos^2\theta$$
$$=9\cos^2\theta\sin^2\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$$
$$=9\cos^2\theta\sin^2\theta$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$=3|\cos\theta\sin\theta|=3\left|\frac{1}{2}\sin 2\theta\right|$$

$$=\frac{3}{2}|\sin 2\theta|$$

よって求める長さは

$$L=\int_0^{2\pi}\frac{3}{2}|\sin 2\theta|\,dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{2}|\sin 2\theta|\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}6|\sin 2\theta|\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}6\sin 2\theta dt$$

$$=\left[-3\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=3-(-3)=6$$

$\cdots\cdots\boxed{\text{オ}}$

【受験生へのアドバイス】

時間内に完答するのは難しい出題セットが続いています。第２問・第３問はノーヒントでは難しい大問や大きなテーマの問題を細かい誘導つきで出題するケースも多いです。

ただ，よく見れば独立している設問や推測で埋めても正解となる部分もあるため，そういったところを見逃さずに「時間内に埋められる限り埋めていく」気持ちで臨むのも大切です。

第２問の解答では三角関数の３倍角の公式を導く過程も含めましたが，第３問ではその過程は省略しました。近年の大学入試の出題傾向からすると３倍角の公式は覚えていないと時間内に解くことは難しいですが，その導出過程も書けるようにしておきましょう。

10月号では，日本大学医学部と聖マリアンナ医科大学の数学を攻略しますので，ご期待ください！

全12校の掲載予定は以下のとおりとなっております。

第109回／４月号　東邦大学医学部
第110回／６月号　東京女子医科大学
第111回／６月号　金沢医科大学
第112回／８月号　岩手医科大学
第113回／８月号　北里大学医学部
第114回／10月号　日本大学医学部
第115回／10月号　聖マリアンナ医科大学
第116回／12月号　愛知医科大学
第117回／12月号　東京医科大学
第118回／２月号　杏林大学医学部
第119回／２月号　東京慈恵会医科大学
第120回／２月号　昭和大学医学部