マンツーマン指導で医歯薬学部に多くの合格者を輩出している「東大螢雪会」では，主要な私立大学医学部の予想問題を作成しています。このコーナーでは，「東大螢雪会」の作成した予想問題を用いて，主要な私立大学医学部の数学を攻略するための演習を行います。隔月刊で毎号２校分の演習を行い，全12校の連載となる予定です。

今月号２校目は，金沢医科大学の数学を攻略します！

第111回　金沢医科大学 編

東大螢雪会講師　上野 尚人

金沢医科大学の数学は，制限時間60分で大問４つが出題されます。解答方式は大学入試センター試験の数学Ⅰ・数学Aと同じ「符号も１桁に含めるマークセンス方式」です。内容もセンター試験と同様，細かい誘導や小問のついたものが並んでおり分量は多めです。大問１が確率の融合問題，大問３が数学Ⅲ「微分法」「積分法」，大問４が数学Ⅲ「いろいろな曲線」からの出題となっています。今回の予想問題では６割程度の得点を目指してください。

$\boxed{1}$　１個のサイコロを２回振り，出た目を $a, b\,(a \geqq b)$ とする。サイコロは１から６までの整数の目が等確率で出るものとする。

$N = {}_aC_b$ とする。

(1)　N の最大値は $\boxed{\text{アイ}}$ である。

(2)　N が素数となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}$ である。

(3)　N が２の倍数となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。

$\boxed{2}$　１辺６の正四面体 OABC がある。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とする。OB の中点をP，OC を $1:2$ に内分する点をQとする。

(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}| = \boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}| = \boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \boxed{\text{シス}}$ である。

(2)　$\triangle\mathrm{APQ}$ の面積は $\boxed{\text{セ}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

(3)　点Oから平面 APQ におろした垂線の長さは $\dfrac{\boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チツ}}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である。

$\boxed{3}$ $f(x)=x^4-x^3-x^2$，$g(x)=mx+n$（m, n は実数）とする。xy 平面上の曲線 $C: y=f(x)$ と直線 $l: y=g(x)$ が異なる 2 点 A, B で接しているとき，A の x 座標を α，B の x 座標を β とおく（$\alpha<\beta$ とする）。このとき $f(x)-g(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$ と変形できるので $\alpha+\beta=\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$，$\alpha\beta=-\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$，

$\beta-\alpha=-\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ネノ}}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ とわかる。C と l で囲まれた部分の面積を S とすると $S=\dfrac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フヘ}}}(\beta-\alpha)^{\boxed{\text{ホ}}}$

$=\dfrac{\boxed{\text{マミム}}}{\boxed{\text{メモヤ}}}\sqrt{\boxed{\text{ユヨ}}}$ である。

$\boxed{4}$ xy 平面上の楕円 $C: \dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$ の焦点を A, B とする。点 A の座標を $(f, 0)$ $(f>0)$，点 B の座標を $(-f, 0)$ とすると $f=\boxed{\text{あ}}\sqrt{\boxed{\text{い}}}$ である。また，楕円 C 上の点 $\mathrm{T}(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ における接線の方程式は $l: x+\boxed{\text{う}}\,y-\boxed{\text{え}}\sqrt{3}=0$ であり，T において l と直交する直線 m が x 軸と交わる点 P の座標を $(p, 0)$ とすると $p=\dfrac{\boxed{\text{お}}\sqrt{\boxed{\text{か}}}}{\boxed{\text{き}}}$ である。ここで $\mathrm{AT}=\boxed{\text{く}}\sqrt{\boxed{\text{け}}}-\sqrt{\boxed{\text{こ}}}$，

$\mathrm{BT}=\boxed{\text{く}}\sqrt{\boxed{\text{け}}}+\sqrt{\boxed{\text{こ}}}$ であり，また $\mathrm{AP}=f-p$，$\mathrm{BP}=p+f$ である。よって $\mathrm{AT}:\mathrm{BT}=\mathrm{AP}:\mathrm{BP}$ が成立するので，$\angle\mathrm{ATP}=\angle\mathrm{BTP}$ であるとわかる。

$\boxed{1}$ **【出題意図と方針】**

整数分野と確率分野の融合問題です。サイコロ 2 個の場合は全ての事象を書き出したほうが早いでしょう。今回の設定では，たとえばサイコロの目が $(1, 2)$，$(2, 1)$ いずれの場合も $(a, b)=(2, 1)$ すなわち $N={}_2\mathrm{C}_1$ になることに注意してください。

【解】

(1) ${}_1\mathrm{C}_1=1$

${}_2\mathrm{C}_1=2$，${}_2\mathrm{C}_2=1$

${}_3\mathrm{C}_1=3$，${}_3\mathrm{C}_2=3$，${}_3\mathrm{C}_3=1$

${}_4\mathrm{C}_1=4$，${}_4\mathrm{C}_2=6$，${}_4\mathrm{C}_3=4$，${}_4\mathrm{C}_4=1$

${}_5\mathrm{C}_1=5$，${}_5\mathrm{C}_2=10$，${}_5\mathrm{C}_3=10$，

${}_5\mathrm{C}_4=5$，${}_5\mathrm{C}_5=1$

${}_6\mathrm{C}_1=6$，${}_6\mathrm{C}_2=15$，${}_6\mathrm{C}_3=20$，

${}_6\mathrm{C}_4=15$，${}_6\mathrm{C}_5=6$，${}_6\mathrm{C}_6=1$

以上より，N の最大値は

${}_6\mathrm{C}_3=20 \cdots \boxed{\text{アイ}}$

(2) N が素数となるのは

${}_2\mathrm{C}_1=2$，${}_3\mathrm{C}_1=3$，${}_3\mathrm{C}_2=3$，

${}_5\mathrm{C}_1=5$，${}_5\mathrm{C}_4=5$

のときであり，

$(a, b)=(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1),$

$(2, 3), (3, 2), (1, 5), (5, 1), (4, 5), (5, 4)$

のとき。求める確率は

$$\frac{10}{36}=\frac{5}{18} \cdots \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}$$

(3) N が 2 の倍数となるのは

${}_2\mathrm{C}_1=2$，${}_4\mathrm{C}_1=4$，${}_4\mathrm{C}_2=6$，

${}_4\mathrm{C}_3=4$，${}_5\mathrm{C}_2=10$，${}_5\mathrm{C}_3=10$，

${}_6\mathrm{C}_1=6$，${}_6\mathrm{C}_3=20$，${}_6\mathrm{C}_5=6$

のときであり

$(a,b)=(1,2),(2,1),(1,4),(4,1),$
$(2,4),(4,2),(3,4),(4,3),(2,5),(5,2),$
$(3,5),(5,3),(1,6),(6,1),(3,6),(6,3),$
$(5,6),(6,5)$

のとき。求める確率は

$$\frac{18}{36}=\frac{1}{2}\cdots\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$$

2 【出題意図と方針】

例年，第2問には数学Bの分野からの出題が入ります。数列が出題されることが多いですが，今回は空間ベクトルからの出題にしました。内容的に難しいところはありませんが煩雑な計算を手短かに済ませましょう。

【解】

(1) $|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2=36$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=6\cdot6\cos60^\circ=18$

である。ここで

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1}{3}\vec{c}-\vec{a}$$

なので

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=\frac{1}{4}|\vec{b}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2$$
$$=9-18+36=27$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2=\frac{1}{9}|\vec{c}|^2-\frac{2}{3}\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{a}|^2$$
$$=4-12+36=28$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$
$$=\frac{1}{6}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{a}|^2$$
$$=3-9-6+36=24$$

よって

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=3\sqrt{3}\cdots\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|=2\sqrt{7}\cdots\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=24\cdots\boxed{\text{シス}}$$

(2) $$\triangle\mathrm{APQ}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}})^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{27\cdot28-18^2}$$
$$=6\sqrt{3}\cdots\boxed{\text{セ}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$$

(3) まず正四面体OABCの体積V_1を求める。

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\sin60^\circ=9\sqrt{3}$$

$\triangle$ABCの外心をDとすると，DAはこの正三角形の外接円の半径Rに等しい。$\triangle$ABCに正弦定理を用いて

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin\angle\mathrm{BAC}}=2R\quad\therefore R=2\sqrt{3}$$

ODは平面ABCに垂直であり，$\triangle$OADに三平方の定理を用いて

$$\mathrm{OD}=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{DA}^2}=2\sqrt{6}$$

よって

$$V_1=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{OD}=18\sqrt{2}$$

であり，四面体OAPQの体積V_2は

$$V_2=V_1\cdot\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OB}}\cdot\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OC}}=3\sqrt{2}$$

Oから平面APQに垂線OHをおろしたとき，

$$V_2=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{APQ}\cdot\mathrm{OH}$$

より $\mathrm{OH}=\dfrac{3\sqrt{10}}{5}\cdots\dfrac{\boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チツ}}}}{\boxed{\text{テ}}}$

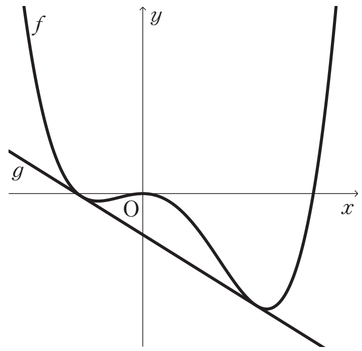
3 【出題意図と方針】

$f(x)$は4次関数で，$y=g(x)$はその複接線と呼ばれます。複接線に関しては，微分を経由する求め方よりこの誘導のように重解を利用して求めたほうが求めやすいです。多項式と直線によって囲まれた部分の面積については部分積分を用いるとよいでしょう。今回の議論を一般化すると

$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^m(x-\beta)^n\,dx$$
$$=(-1)^{m+n+1}\frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

という結果が得られます。$m=n=1$ の場合の結果は放物線と直線で囲まれた部分の面積を求めるときに用いられる「6分の1公式」になります。一般的には B（ベータ）関数と呼ばれる議論になります。

【解】



$$(x-\alpha)^2(x-\beta)^2=\{(x-\alpha)(x-\beta)\}^2$$
$$=\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}^2$$
$$=x^4-2(\alpha+\beta)x^3+\{(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta\}x^2$$
$$-2(\alpha+\beta)\alpha\beta x+(\alpha\beta)^2$$

これと

$$f(x)-g(x)=x^4-x^3-x^2-mx-n$$

の係数を比較して

$$\begin{cases}-2(\alpha+\beta)=-1\\(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta=-1\\-2(\alpha+\beta)\alpha\beta=-m\\(\alpha\beta)2=-n\end{cases}$$

よって

$$\alpha+\beta=\frac{1}{2}\cdots\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}},\quad \alpha\beta=-\frac{5}{8}\cdots\frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

$$m=2(\alpha+\beta)\alpha\beta=-\frac{5}{8},\ n=-(\alpha\beta)^2=-\frac{25}{64}$$

$$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\frac{11}{4}\text{ より}$$

$$\beta-\alpha=\frac{\sqrt{11}}{2}\cdots\frac{\sqrt{\boxed{\text{ネノ}}}}{\boxed{\text{ハ}}}$$

ここで，C と l で囲まれた部分の面積 S は

$$S=\int_\alpha^\beta\{f(x)-g(x)\}\,dx$$

$$=\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^2(x-\beta)^2\,dx$$

部分積分を用いて

$$S=\frac{1}{3}\left[(x-\alpha)^3(x-\beta)^2\right]_\alpha^\beta$$
$$-\int_\alpha^\beta\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\cdot2(x-\beta)\,dx$$
$$=\int_\alpha^\beta\left(-\frac{2}{3}\right)(x-\alpha)^3(x-\beta)\,dx$$
$$=\left[\left(-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\right)(x-\alpha)^4(x-\beta)\right]_\alpha^\beta$$
$$-\int_\alpha^\beta\left(-\frac{1}{6}\right)(x-\alpha)^4\,dx$$
$$=\frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5\cdots\frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フヘ}}},\ \boxed{\text{ホ}}$$

よって

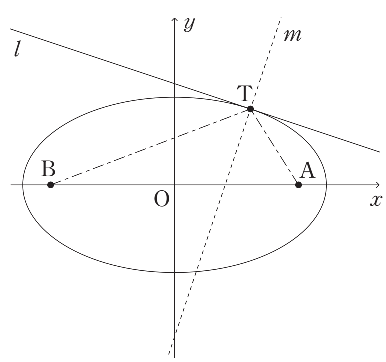
$$S=\frac{1}{30}\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^5=\frac{1}{30}\cdot\frac{121\sqrt{11}}{32}=\frac{121}{960}\sqrt{11}$$

$$\cdots\frac{\boxed{\text{マミム}}}{\boxed{\text{メモヤ}}}\sqrt{\boxed{\text{ユヨ}}}$$

$\boxed{4}$ 【出題意図と方針】

数学Ⅲ「いろいろな曲線」の分野から，二次曲線の性質に関する出題です。直線 m は $\angle$ATM の二等分線になり，波の反射との関連もわかります。AT や BT の長さは二重根号が外れますが，これも二次曲線に関して一般的に成り立つ性質です（二次曲線上の点と焦点との距離は一次多項式で表される）。

【解】



$f^2=12-4=8$ より

$$f=2\sqrt{2}\cdots\boxed{\text{あ}}\sqrt{\boxed{\text{い}}}$$

T における接線 l の方程式は

$$\frac{\sqrt{3}\,x}{12}+\frac{\sqrt{3}\,y}{4}=1$$

$$\Leftrightarrow\ x+3y-4\sqrt{3}=0\cdots\boxed{\text{う}},\ \boxed{\text{え}}$$

この接線 l の傾きは $-\dfrac{1}{3}$ なので m の傾きは 3 であり

$$m:y-\sqrt{3}=3x-\sqrt{3}\ \Leftrightarrow\ y=3x-2\sqrt{3}$$

となるので，$(x,y)=(p,0)$ を代入することで

$$p=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdots\frac{\boxed{\text{お}}\sqrt{\boxed{\text{か}}}}{\boxed{\text{き}}}$$

ここで $\mathrm{A}(2\sqrt{2},0)$，$\mathrm{T}(\sqrt{3},\sqrt{3})$ より

$$\mathrm{AT}^2\,(2\sqrt{2}-\sqrt{3})^2+(0-\sqrt{3})^2=14-4\sqrt{6}$$

$$\mathrm{AT}=\sqrt{14-2\sqrt{24}}=\sqrt{12}-\sqrt{2}$$

$$=2\sqrt{3}-2\cdots\boxed{\text{く}}\sqrt{\boxed{\text{け}}}-\boxed{\text{こ}}$$

同様に

$$\mathrm{BT}=2\sqrt{3}+2$$

とわかる。また

$$\mathrm{AP}=f-p=2\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{3}(2\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

$$\mathrm{BP}=p+f=2\sqrt{2}+\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{3}(2\sqrt{3}+\sqrt{2})$$

より $\mathrm{AT}:\mathrm{BT}=\mathrm{AP}:\mathrm{BP}$ が成立するとわかる。

【受験生へのアドバイス】

大問４～６題の出題が2016年度から大問４題になりましたが，小問の数およびマークの数が増えているため処理量は増えています。問題文が長いのはセンター試験と同様に細かい誘導がついているためなので，その誘導にきちんと乗っていく姿勢が重要です。数学Ⅲの出題比重が高いこともふまえ，微積分を中心とした計算練習を欠かさないようにしてください。

８月号では，岩手医科大学と北里大学医学部の数学を攻略しますので，ご期待ください！

全12校の掲載予定は以下のとおりとなっております。

第109回／４月号　東邦大学医学部
第110回／６月号　東京女子医科大学
第111回／６月号　金沢医科大学
第112回／８月号　岩手医科大学
第113回／８月号　北里大学医学部
第114回／10月号　日本大学医学部
第115回／10月号　聖マリアンナ医科大学
第116回／12月号　愛知医科大学
第117回／12月号　東京医科大学
第118回／２月号　杏林大学医学部
第119回／２月号　東京慈恵会医科大学
第120回／２月号　昭和大学医学部