東大螢雪会 **医学部数学** 攻略演習

マンツーマン指導で医歯薬学部に多くの合格者を輩出している「東大螢雪会」では，主要な私立大学医学部の予想問題を作成しています。このコーナーでは，「東大螢雪会」の作成した予想問題を用いて，主要な私立大学医学部の数学を攻略するための演習を行います。隔月刊で毎号２校分の演習を行い，全12校の連載となる予定です。

今月号１校目は，東京女子医科大学の数学を攻略します！

第110回 東京女子医科大学 編

東大螢雪会講師　上野 尚人

東京女子医科大学の数学は，制限時間60分で大問４つが出題されます。2016年から小問集合問題がなくなり，全体としての分量も軽減されてきました。「場合の数と確率」の問題と整数問題がほぼ毎年出題されています。微積の出題もほぼ毎年あります。制限時間は短いですが煩雑な計算は減っており，この傾向が続けば高得点での勝負になるでしょう。今回の予想問題では４問中３問程度の得点を目指してください。

1 xy 平面上の楕円 $C:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ と双曲線 $D:x^2-\dfrac{y^2}{k}=1\ (k>0)$ は焦点が一致している。

(1) k の値を求めよ。

(2) C と D の交点において，C の接線と D の接線は直交することを示せ。

2 i を虚数単位とする $(i^2=-1)$。

$$a_n=(1+2i)^n+(1-2i)^n\ (n=1, 2, 3, \dots)$$

によって定義される数列 $\{a_n\}$ を考える。

(1) 漸化式 $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$ をみたす実数 p, q を求めよ。

(2) すべての正の整数 n に対して a_n は整数であることを示せ。

(3) a_n が５の整数倍になることがあるか。あるときはそのときの n の条件を，ないときはその理由を示せ。

3 $f(x)=e^x+e^{-x}$，$g(x)=ax+b$（a, b は実数）とする。

(1) xy 平面上の２つの図形 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ がただ１つの共有点をもつとき，b を a で表せ。

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}^2\,dx$ の値が最小となる a, b の値を求めよ。

4 n を３以上９以下の整数とする。n 進法の循環小数で表された数字 $x=0.2020\dots_{(n)}=0.\dot{2}\dot{0}_{(n)}$ を考える。x を10進法の小数で表したときに有限小数となるような n をすべて求めよ。

$\boxed{1}$ 【出題意図と方針】

数学Ⅲ「いろいろな曲線（二次曲線）」からの出題です。二次曲線の問題の中には，この(1)のように焦点・準線・漸近線といった言葉の定義を知っていれば解けるものもあるのできちんと押さえておきましょう。(2)で示す事実は，今回の場合だけでなく「焦点を共有する楕円と双曲線」すべてについていえます。

(1)　楕円 C の焦点の座標は

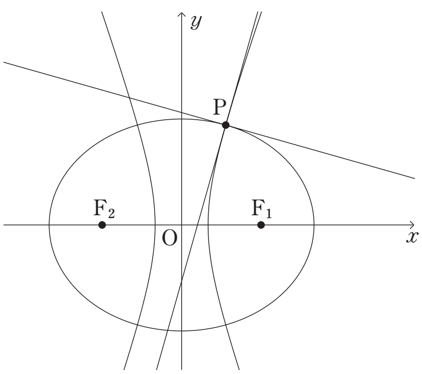
$$(\pm\sqrt{25-16}\,,0)=(\pm 3,0)$$

双曲線 D の焦点の座標は

$$(\pm\sqrt{1+k}\,,0)$$

これが一致するとき $3=\sqrt{1+k}$ より

$k=8$ ……(答)



(2)　**【証】**

$C:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ と $D:x^2-\dfrac{y^2}{8}=1$ を連立させて解くと

$x^2=\dfrac{25}{9}\,,\ y^2=\dfrac{128}{9}$ となる。

C, D はいずれも x 軸，y 軸に関して対称なので第1象限の交点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{8\sqrt{2}}{3}\right)$ で考えればよい。

点Pにおける楕円 C の接線を l，双曲線 D の接線を m とする。

$$l:\frac{\frac{5}{3}x}{25}+\frac{\frac{8\sqrt{2}}{3}y}{16}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{15}x+\frac{\sqrt{2}}{6}y=1$$

$$m:\frac{5}{3}x-\frac{\frac{8\sqrt{2}}{3}y}{8}=1 \Leftrightarrow \frac{5}{3}x-\frac{\sqrt{2}}{3}y=1$$

l の法線ベクトルの1つは $\vec{p}=\left(\dfrac{1}{15}, \dfrac{\sqrt{2}}{6}\right)$

m の法線ベクトルの1つは $\vec{q}=\left(\dfrac{5}{3}, -\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$

$$\vec{p}\cdot\vec{q}=\frac{1}{15}\cdot\frac{5}{3}+\frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{1}{9}-\frac{1}{9}=0$$

よって $\vec{p}\perp\vec{q}$ より $l\perp m$ とわかる。**【証明終】**

$\boxed{2}$ 【出題意図と方針】

数学B「数列（漸化式）」の応用問題として複素数の要素を入れました。共役複素数といえば基本対称式，基本対称式といえば2次方程式の解と係数の関係，という流れを自力でつくれるようにしておきましょう。(3)は，まず具体的にいくつかの項を求めていき，その中に5の倍数が現れないことを推測しましょう。

【解】

(1)　　$\alpha=1+2i, \beta=1-2i$

とおく。$\alpha+\beta=2, \alpha\beta=5$ なので α, β は x の2次方程式

$$x^2-2x+5=0$$

の2つの解である。よって

$$\alpha^2-2\alpha+5=0 \Leftrightarrow \alpha^2=2\alpha-5$$

が成立し，両辺に α^n をかけて

$$\alpha^{n+2}=2\alpha^{n+1}-5\alpha^n$$

といえる。同様に

$$\beta^{n+2}=2\beta^{n+1}-5\beta^n$$

もいえる。この2つの式を左辺どうし，右辺どうし加えて

$$\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}=2(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})-5(\alpha^n+\beta^n)$$

となるので，数列 $\{a_n\}$ について隣接3項間漸化式

$$a_{n+2}=2a_{n+1}-5a_n$$

が成立。

$p=2,\ q=-5$ ……(答)

⑵ **【証】**

すべての正の整数 n に対して a_n が整数であることを，n についての数学的帰納法で示す。

(i)　$n=1, 2$ のとき

$a_1=2$，$a_2=(-3+4i)+(-3-4i)=-6$ なので成立。

(ii)　$n=k$，$k+1$（k は正の整数）のとき成立したと仮定。すなわち a_k，a_{k+1} が整数であるとする。

⑴で求めた漸化式で $n=k$ として

$a_{k+2}=2a_{k+1}-5a_k$ となるので，a_{k+2} も整数といえる。

以上(i)，(ii)よりすべての正の整数 n に対して a_n は整数であるといえる。**【証明終】**

⑶　ある3以上の整数 m に対して a_m が5の整数倍であったと仮定する。

⑴で示した漸化式で $n+2=m$ として

$a_m=2a_{m-1}-5a_{m-2} \Leftrightarrow a_m+5a_{m-2}=2a_{m-1}$…(＊)

仮定より a_m が5の整数倍であり，⑵より a_{m-2} が整数なので(＊)の左辺は5の整数倍。

5と2は互いに素なので(＊)の右辺より a_{m-1} も5の整数倍といえる。

これを繰り返すことによって $a_m \Rightarrow a_{m-1} \Rightarrow \cdots \Rightarrow a_2$ が5の整数倍となるが，これは $a_2=-6$ と矛盾。

よって a_m が5の整数倍という仮定が誤りであり，この数列 $\{a_n\}$ の中に5の整数倍の項は現れないといえる。……(答)

$\boxed{3}$ 【出題意図と方針】

数学Ⅲ「微分法」「積分法」からの出題です。⑴は，まず図示して「じつは接線のことを問われている」ということを把握することが大切です。接線の方程式を決定するには接点の x 座標をまず設定する必要があります。b を a で表すには，その際に設定したパラメーター t を消去することになります。⑵もまず図形で状況を把握して，y 軸に関する対称性より $a=0$ のときに定積分の値が最小になることを推測しておきましょう。

【解】

⑴　$f'(x)=e^x-e^{-x}$, $f''(x)=e^x+e^{-x}>0$

よって $y=f(x)$ のグラフは下に凸である。直線 $y=g(x)$ とただひとつの共有点をもつのは，$y=f(x)$ の接線となるときである。

$y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{T}(t, f(t))$ における接線は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$
$$y-(e^t+e^{-t})=(e^t-e^{-t})(x-t)$$
$$y=(e^t-e^{-t})x+((-t+1)e^t+(t+1)e^{-t})$$

よって

$$a=e^t-e^{-t},\ b=(-t+1)e^t+(t+1)e^{-t}$$

となる。$e^t=u$ (>0) とおくと $a=u-\dfrac{1}{u}$ より

$u^2-au-1=0$

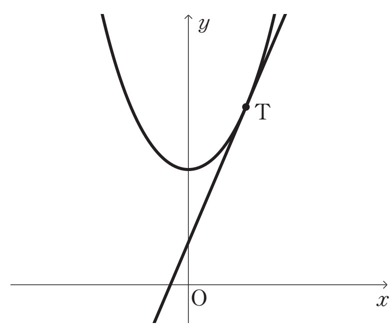
これを $u>0$ の条件下で解くと $u=\dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$

より $t=\log\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right)$　　となる。

よって b を a で表すと

$$b=\left(-\log\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right)+1\right)\cdot\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right)$$
$$+\left(\log\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right)+1\right)\cdot\left(\frac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right)$$

……(答)



⑵

$$\{f(x)-g(x)\}^2=\{f(x)\}^2-2f(x)\cdot g(x)+\{g(x)\}^2$$
$$=(e^{2x}+2+e^{-2x})-2(ax+b)(e^x+e^{-x})+(ax+b)^2$$
$$=(e^{2x}+2+e^{-2x})-2ax(e^x+e^{-x})-2b(e^x+e^{-x})$$
$$+a^2x^2+2abx+b^2$$

ここで

$$\int_{-1}^{1}x(e^x+e^{-x})\,dx=0\ （奇関数）$$

$$\int_{-1}^{1}(e^x+e^{-x})\,dx=[(e^x+e^{-x})]_{-1}^{1}$$

$$=(e-e^{-1})-(e^{-1}-e)=2(e-e^{-1})$$

$$\int_{-1}^{1}(a^2x^2+2abx+b^2)\,dx$$

$$=\left[\frac{a^2}{3}x^3+abx^2+b^2x\right]_{-1}^{1}$$

$$=\frac{2}{3}a^2+2b^2$$

よって，求める定積分の値 I は（C を定数として）

$$I=C-2a\cdot 0-2b\cdot 2(e-e^{-1})+\frac{2}{3}a^2+2b^2$$

$$=2a^2+2(b-(e-e^{-1}))^2+C$$

であり，この値が最小となるときは

$a=0$，$b=e-e^{-1}$ ……(答)

4 【出題意図と方針】

本学でほぼ毎年出題される数学A「整数」分野からの出題です。n 進法で表された小数，有限小数かどうかの判定，循環小数を分数に変換する手段といった事項はセンター試験で出題されたこともありますが，全般的に正解率が低いのでこの機会に理解を深めておいてください。n 進法の問題のコツは，まず10進法に直すことです。

【解】

x は初項 $\dfrac{2}{n}$，公比 $\dfrac{1}{n^2}$ の無限等比数列の和。

$0<\dfrac{1}{n^2}<1$ なのでこの和は収束し，その値は

$$x=\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n^2}}=\frac{2n}{n^2-1}$$

よって

$$\begin{cases} n=3\text{ のとき } x=\dfrac{3}{4} \\ n=4\text{ のとき } x=\dfrac{8}{15} \\ n=5\text{ のとき } x=\dfrac{5}{12} \\ n=6\text{ のとき } x=\dfrac{12}{35} \\ n=7\text{ のとき } x=\dfrac{7}{24} \\ n=8\text{ のとき } x=\dfrac{16}{63} \\ n=9\text{ のとき } x=\dfrac{9}{40} \end{cases}$$

10進法で有限小数となるのは，これらの既約分数のうち，分母を素因数分解したときに素数2, 5のみが現れるもの。

よって求める値は

$n=3, 9$ ……(答)

【受験生へのアドバイス】

本学の場合，解答の途中経過を書く必要があるかどうかが問題用紙や解答用紙には明記されていませんが，解答用紙に十分なスペースがあることから途中経過も採点に含まれると思われます。試験時間の短さに対して処理する量が多いという傾向は変わっていませんので，途中経過を解答用紙に書けるだけ書いておくのがよいかと思われます。

8月号では，岩手医科大学と北里大学医学部の数学を攻略しますので，ご期待ください！

全12校の掲載予定は以下のとおりとなっております。

第109回／4月号　東邦大学医学部
第110回／6月号　東京女子医科大学
第111回／6月号　金沢医科大学
第112回／8月号　岩手医科大学
第113回／8月号　北里大学医学部
第114回／10月号　日本大学医学部
第115回／10月号　聖マリアンナ医科大学
第116回／12月号　愛知医科大学
第117回／12月号　東京医科大学
第118回／2月号　杏林大学医学部
第119回／2月号　東京慈恵会医科大学
第120回／2月号　昭和大学医学部