東大螢雪会 **医学部数学** 攻略演習

マンツーマン指導で医歯薬学部に多くの合格者を輩出している「東大螢雪会」では，主要な私立大学医学部の予想問題を作成しています。このコーナーでは，「東大螢雪会」の作成した予想問題を用いて，主要な私立大学医学部の数学を攻略するための演習を行います。毎号１校分の演習を行い，全12校の連載となる予定です。

今月号では，杏林大学・医学部の数学を攻略します！

第106回　杏林大学・医学部 編

東大螢雪会講師　上野 尚人

杏林大学・医学部の数学は，制限時間60分で大問４つが出題されます。すべてマークセンス式です。今回の予想問題では６割程度の得点を目指してください。

$\boxed{1}$ x の３次方程式 $x^3-3x^2+9x-9=0\cdots(*)$ の実数解を求めたい。

(a) $x-a=t$ と置き換えることで，３次方程式 $(*)$ は，２次の項のない方程式 $t^3+bt-c=0\cdots$①に書き換えることができる。このとき $a=\boxed{ア}$，$b=\boxed{イ}$，$c=\boxed{ウ}$ である。

(b) $t=p+q$（p, q は $pq=-\dfrac{b}{3}$ をみたす実数）と置き換えることで，①は $p^3+q^3=\boxed{エ}\cdots$②と書き換えることができる。

(c) ②および $p^3q^3=(pq)^3=-\boxed{オ}$ より，p^3 と q^3 は u の２次方程式 $u^2-\boxed{エ}-\boxed{オ}=0$ の２つの解である。$p^3>q^3$ とすると $p^3=\boxed{カ}$，$q^3=-\boxed{キ}$ である。以上より，方程式 $(*)$ の実数解の１つは $x=\boxed{ア}+\sqrt[3]{\boxed{カ}}-\sqrt[3]{\boxed{キ}}$ とわかる。

$\boxed{2}$ xy 平面上で，方程式 $3x^2+4xy+2y^2-11x-12y+12=0$ で表される図形は楕円である。この楕円を C とおく。

(a) 楕円 C 上の点で x 座標が最小のものを P，x 座標が最大なものを Q とする。点 P の座標は $\left(-\boxed{ア}, \boxed{イ}\right)$ であり点 Q の座標は $\left(\boxed{ウ}, \boxed{エ}\right)$ である。

(b) 楕円 C で囲まれる図形の面積は $\dfrac{\boxed{オカ}}{\boxed{キ}}\sqrt{\boxed{ク}}\,\pi$ であり，楕円 C で囲まれる部分を x 軸の周りに１回転させてできる立体の体積は $\dfrac{\boxed{ケコサ}}{\boxed{シ}}\sqrt{\boxed{ス}}\,\pi^2$ である。

(c)　PQ の中点 M の座標は$\left(-\frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}, \frac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}\right)$であり，M が原点に重なるように C を平行移動させてできる楕円 D の方程式は $3x^2+4xy+2y^2=\frac{\boxed{ツテ}}{\boxed{ト}}$ である。原点 O を中心とする楕円 D の長半径 a と短半径 b の長さを求めたい。楕円 D を極形式で書き換えると

$r^2\left(\boxed{ナ}\sin 2\theta+\frac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}\cos 2\theta+\frac{\boxed{ネ}}{\boxed{ノ}}\right)=\frac{\boxed{ツテ}}{\boxed{ト}}$ であり，r^2 の最大値は

$\frac{\boxed{ハヒ}}{\boxed{フヘ}}\left(\boxed{ホ}+\sqrt{\boxed{マミ}}\right)$ となりこれが a^2 の値となる。同様に r^2 の最小値は

$\frac{\boxed{ハヒ}}{\boxed{フヘ}}\left(\boxed{ホ}-\sqrt{\boxed{マミ}}\right)$ となりこれが b^2 の値となる。

$\boxed{3}$　数直線上に点 P がある。1 から 6 までの目が等確率で出るサイコロを 1 個振って，出た目が 2 以下なら P を負の方向に 1 だけ動かし，出た目が 3 以上なら P を正の方向に 1 だけ動かす。この試行を繰り返し，P の座標が 0 または10になったところで試行を終える。n を 1 から 9 までの整数とし，P の座標が n の状態から始めて最終的に座標10へたどり着く確率を p_n とする。

(a)　p_{n-1}, p_n, p_{n+1} の間には $p_n=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}p_{n-1}+\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}p_{n+1}$ という関係式が成立する。

(b)　この等式を変形すると $p_{n-1}-p_n=\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}(p_n-p_{n-1})$ となり，

$p_{n+1}-p_n=\left(\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\right)^n(p_1-p_0)$　$(n=0, 1, 2, \ldots, 9)$ となる。

(c)　$p_0=0, p_{10}=1$ と設定することで $p_1-p_0=\frac{\boxed{キクケ}}{\boxed{コサシス}}$ となる。よって，座標 5 から試行を開始して座標10に到達する確率は $p_5=\frac{\boxed{セソ}}{\boxed{タチ}}$ となる。

$\boxed{4}$　xy 平面上の曲線 $C: y=x^4\,(-2\leqq x\leqq 2)$ を y 軸の周りに 1 回転させた形の容器をつくり，y 軸の正方向を真上にして設置する。x 座標，y 座標ともに単位は cm とする。この容器の真上から毎秒 $\pi\,(cm^3)$ の水を注いでいく。

(a)　水が満杯になるまでの所要時間は $\dfrac{\boxed{\text{アイウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ 秒である。

(b)　水の高さが 4 cm になった瞬間の水の高さの変化率は毎秒 $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ (cm) である。

(c)　水の高さが 4 cm になった瞬間の水面の面積の変化率は毎秒 $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\pi$ (cm^2) である。

$\boxed{1}$ **【解】**

$x-a=t$ すなわち $x=t+a$ と置き換えて

$(t+a)^3-3(t+a)^2+9(t+a)-9=0$

$t^3-(3a-3)t^2+(3a^2-6a+9)t$
$+(a^3-3a^2+9a-9)=0$

t^2 の係数が 0 になるとき $a=1\cdots\boxed{\text{ア}}$ であり，

このとき 3 次方程式は

$t^3+6t-2=0\cdots\boxed{\text{イ}},\boxed{\text{ウ}}$

と書き換えられる。ここで $t=p+q$ とおくと

$(p+q)^3+6(p+q)-2=0$

$(p^3+q^3)+(3pq+6)(p+q)-2=0$

$pq=-\dfrac{b}{3}=-2$ とすると

$p^3+q^3=2\cdots\boxed{\text{エ}}$

これと

$p^3q^3=(pq)^3=(-2)^3=-8\cdots\boxed{\text{オ}}$

より，p^3 と q^3 は u の 2 次方程式

$u^2-2u-8=0$

の 2 解。$p^3>q^3$ とすると

$p^3=4\cdots\boxed{\text{カ}}$，$q^3=-2\cdots\boxed{\text{キ}}$

である。以上より，方程式(＊)の実数解の 1 つは

$x=a+(p+q)=1+\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}$

とわかる。

$\boxed{2}$ **【解】**

(a)　C の方程式を y について整理して

$2y^2+(4x-12)y+(3x^2-11x+12)=0\cdots$①

これを y の 2 次方程式とみて，y が実数となる条件を考える。判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=(2x-6)^2-2(3x^2-11x+12)$

$=-2x^2-2x+12=-2(x+3)(x-2)$

$D\geqq 0$ を x について解いて $-3\leqq x\leqq 2$

これが x 座標の最小値と最大値である。

①で $x=-3$ とすると $2y^2-24y+72=0$

このとき $y=6$

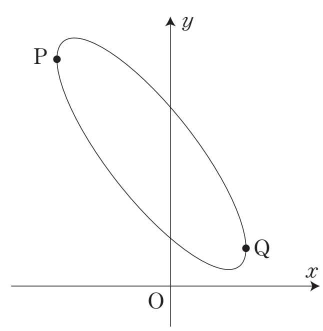
①で $x=2$ とすると $2y^2-4y+2=0$

このとき $y=1$

以上より

$P(-3,6)\cdots(\boxed{\text{ア}},\boxed{\text{イ}})$

$Q(2,1)\cdots(\boxed{\text{ウ}},\boxed{\text{エ}})$



(b)　①を y について解くと

$$y=\frac{-2x+6\pm\sqrt{-2x^2-2x+12}}{2}$$

複号が正のものを y_1，複号が負のものを y_2 とおく。楕円 C で囲まれる部分の面積 S は

$$S=\int_{-3}^{2}(y_1-y_2)\,dx=\int_{-3}^{2}\sqrt{2}\sqrt{-x^2-x+6}\,dx$$

$Y=\sqrt{-x^2-x+6}$ とおくと

$Y^2=-x^2-x+6\,(Y\geqq 0)$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+Y^2=\frac{25}{4}\quad(Y\geqq 0)$$

これは中心 $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$，半径 $\dfrac{5}{2}$ の半円を表す。

よって

$$\int_{-3}^{2}\sqrt{-x^2-x+6}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\pi\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{8}\pi$$

（半円の面積）なので

$$S=\frac{25}{8}\sqrt{2}\,\pi\cdots\frac{\boxed{オカ}}{\boxed{キ}}\sqrt{\boxed{ク}}\,\pi$$

楕円 C が x 軸と交点をもつかどうかを調べる。

C の方程式で $y=0$ とすると

$3x^2-11x+12=0$

この x の 2 次方程式の判別式の値は

$11^2-4\cdot3\cdot12<0$ なので実数解をもたない。

よって楕円 C は x 軸と交点をもたず，点 P および点 Q の y 座標が正であることより楕円 C の全体は $y>0$ の範囲にあることがわかる。

よって回転体の体積を V とすると

$$\frac{V}{\pi}=\int_{-3}^{2}\{(y_1)^2-(y_2)^2\}\,dx$$

$$=\int_{-3}^{2}(y_1+y_2)(y_1-y_2)\,dx$$

$$=\int_{-3}^{2}(-2x+6)\sqrt{-2x^2-2x+12}\,dx$$

$$=\sqrt{2}\int_{-3}^{2}(-2x+6)\sqrt{-x^2-x+6}\,dx$$

ここで，$(-x^2-x+6)'=-2x-1$ に注目して

$$\frac{V}{\pi}=\sqrt{2}\int_{-3}^{2}(-2x+1)\sqrt{-x^2-x+6}\,dx$$

$$+\sqrt{2}\int_{-3}^{2}7\sqrt{-x^2-x+6}\,dx$$

と変形する。

$$\int_{-3}^{2}(-2x+1)\sqrt{-x^2-x+6}\,dx$$

$$=\int_{-3}^{2}(-x^2-x+6)^{\frac{1}{2}}(-x^2-x+6)'\,dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}(-x^2-x+6)^{\frac{2}{3}}\right]_{-3}^{2}=0$$

$$\int_{-3}^{2}7\sqrt{-x^2-x+6}\,dx$$

$$=7\cdot\frac{25}{8}\pi=\frac{175}{8}\pi$$

よって

$$\frac{V}{\pi}=\sqrt{2}\cdot0+\sqrt{2}\cdot\frac{175}{8}\pi$$

より

$$V=\frac{175}{8}\sqrt{2}\,\pi^2\cdots\frac{\boxed{ケコサ}}{\boxed{シ}}\sqrt{\boxed{ス}}\,\pi^2$$

- PQ の中点 M（楕円の中心すなわち重心）を求めたのち，点 M の動く長さ

$$L=2\pi\cdot\frac{7}{2}=7\pi$$

から

$$V=S\cdot L=\frac{175}{8}\sqrt{2}\,\pi^2$$

と処理することもできます（パップス・ギュルダンの定理）。

(c) PQ の中点 M の座標は

$$\left(-\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)\cdots\left(-\frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}},\frac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}\right)$$

C の方程式で x のかわりに $x-\dfrac{1}{2}$ として，y のかわりに $y+\dfrac{7}{2}$ とすると

$$3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y+\frac{7}{2}\right)+2\left(y+\frac{7}{2}\right)^2$$

$$-11\left(x-\frac{1}{2}\right)-12\left(y+\frac{7}{2}\right)+12=0$$

$$3x^2+4xy+2y^2=\frac{25}{4}\cdots\frac{\boxed{ツテ}}{\boxed{ト}}$$

この楕円 D の方程式で

$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$

とすると

$$3r^2\cos^2\theta+4r^2\cos\theta\sin\theta+2r^2\sin^2\theta=\frac{25}{4}$$

$$3r^2\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}+4r^2\cdot\frac{\sin 2\theta}{2}$$

$$+2r^2\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}=\frac{25}{4}$$

$$r^2\left(2\sin 2\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{5}{2}\right)=\frac{25}{4}$$

$$\cdots\boxed{ナ},\ \frac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}},\ \frac{\boxed{ネ}}{\boxed{ノ}}$$

三角関数の合成より

$$2\sin 2\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta$$

$$=\frac{\sqrt{17}}{2}\sin(2\theta+\alpha)\ (\alpha\text{ は定角})$$

であり

$$\frac{5-\sqrt{17}}{2}\leqq 2\sin 2\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{5}{2}\leqq\frac{5+\sqrt{17}}{2}$$

よって r^2 の範囲は

$$\frac{25}{4}\cdot\frac{2}{5+\sqrt{17}}\leqq r^2\leqq\frac{25}{4}\cdot\frac{2}{5-\sqrt{17}}$$

$$\frac{25(5-\sqrt{17})}{16}\leqq r^2\leqq\frac{25(5+\sqrt{17})}{16}$$

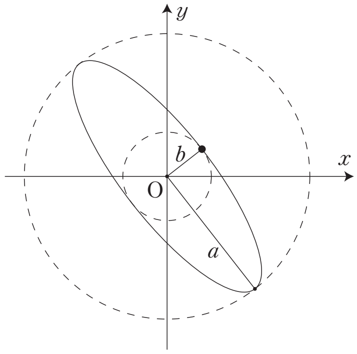
となり

$$a^2=\frac{25}{16}(5+\sqrt{17})$$

$$\cdots\frac{\boxed{ハヒ}}{\boxed{フヘ}}\left(\boxed{ホ}+\sqrt{\boxed{マミ}}\right)$$

$$b^2=\frac{25}{16}(5-\sqrt{17})$$

- 楕円の面積が $S=\pi ab$ となることを確認しておくと検算になります。



$\boxed{3}$ **【解】**

P の座標が $n\ (n=1, 2, \ldots, 9)$ のとき，１回の試行を行うと

- 確率 $\frac{1}{3}$ で負の方向に動き，座標が $n-1$ になり，
- 確率 $\frac{2}{3}$ で正の方向に動き，座標が $n+1$ になる。

その動いた後の座標からあらためて試行を繰り返すと考えて

$$p_n=\frac{1}{3}p_{n-1}+\frac{2}{3}p_{n+1}\cdots\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}},\ \frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$$

という関係式が成立する。この等式を変形すると

$$3p_n=p_{n-1}+2p_{n+1}$$

$$2p_{n+1}-2p_n=p_n-p_{n-1}$$

$$p_{n+1}-p_n=\frac{1}{2}(p_n-p_{n-1})\cdots\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$$

となり，$\{p_{n+1}-p_n\}$ は公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列なので

$$p_{n+1}-p_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n(p_1-p_0)$$

とわかる。$p_1-p_0=a$ とおくと

$$p_{10}-p_0=(p_1-p_0)+(p_2-p_1)+\cdots+(p_{10}-p_9)$$

$$=a+a\cdot\frac{1}{2}+\cdots+a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^9=a\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=a\cdot\frac{1023}{1024}\div\frac{1}{2}=\frac{1023}{512}a$$

これが $p_{10}-p_0=1$ に等しいので

$$p_1-p_0=\frac{512}{1023}\cdots\frac{\boxed{キクケ}}{\boxed{コサシス}}$$

$$p_5=p_5-p_0$$

$$=(p_1-p_0)+(p_2-p_1)+\cdots+(p_5-p_4)$$

$$=a+a\cdot\frac{1}{2}+\cdots+a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=a\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=a\cdot\frac{31}{32}\div\frac{1}{2}=\frac{31}{16}a$$

$$=\frac{31}{16}\cdot\frac{512}{1023}=\frac{32}{33}\cdots\frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$$

4 【解】

容器の体積は

$$\int_0^{16}\pi x^2dy=\int_0^{16}\pi y^{\frac{1}{2}}dy=\frac{2}{3}\pi\left[y^{\frac{3}{2}}\right]_0^{16}$$

$$=\frac{2}{3}\pi(64-0)=\frac{128}{3}\pi$$

よって，水が満杯になるまでの所要時間は

$$\frac{128}{3}\text{秒}\cdots\frac{\boxed{\text{アイウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

ここで，水を注ぎはじめてから t 秒後の水の体積を $V\,(cm^3)$，原点から測った水面の高さを $h\,(cm)$，水面の面積 $S\,(cm^2)$ とする。

$$y=x^4 \Rightarrow x=y^{\frac{1}{4}}$$

より水面の円の半径は $r=h^{\frac{1}{4}}(cm)$ で

$$\frac{dV}{dt}=\pi\cdots①$$

$$V=\int_0^h\pi x^2dy=\frac{2}{3}\pi\left[y^{\frac{3}{2}}\right]_0^h=\frac{2}{3}\pi h^{\frac{3}{2}}\cdots②$$

$$S=\pi r^2=\pi h^{\frac{1}{2}}\cdots③$$

が成立。②の両辺を t について微分して

$$\frac{dV}{dt}=\pi h^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{dh}{dt}$$

これと①より

$$\frac{dh}{dt}=\frac{dV}{dt}\div\left(\pi h^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{h^{\frac{1}{2}}}$$

よって $h=4$ のとき

$$\frac{dh}{dt}=\frac{1}{2}\cdots\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

③の両辺を t について微分して

$$\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}\pi h^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{dh}{dt}=\frac{1}{2}\pi\cdot\frac{1}{h}$$

よって $h=4$ のとき

$$\frac{dS}{dt}=\frac{1}{8}\pi\cdots\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\pi$$

【受験生へのアドバイス】

2のような煩雑かつ大量の計算を短時間で要求されるのが本学の数学入試の特徴です。同一の大問の中でも独立した設問となっているものもありますので，問題文全体に目を通して「取れる問題を取る」姿勢で臨んでください。

来月号では，東京慈恵会医科大学の数学を攻略しますので，ご期待ください！

全12校の掲載予定は以下のとおりとなっております。

第97回／４月号　東邦大学医学部
第98回／５月号　東京女子医科大学
第99回／６月号　金沢医科大学
第100回／７月号　岩手医科大学医学部
第101回／８・９月合併号　北里大学医学部
第102回／10月号　日本大学医学部
第103回／10月臨時増刊号 聖マリアンナ医科大学
第104回／11月号　愛知医科大学医学部
第105回／12月号　東京医科大学
第106回／１・２月合併号　杏林大学医学部
第107回／３月臨時増刊号　東京慈恵会医科大学
第108回／３月号　昭和大学医学部

東大螢雪会 **医 学 部 数 学** 攻略演習

マンツーマン指導で医歯薬学部に多くの合格者を輩出している「東大螢雪会」では，主要な私立大学医学部の予想問題を作成しています。このコーナーでは，「東大螢雪会」の作成した予想問題を用いて，主要な私立大学医学部の数学を攻略するための演習を行います。毎号１校分の演習を行い，全12校の連載となる予定です。

今月号では，東京慈恵会医科大学の数学を攻略します！

第107回 東京慈恵会医科大学 編

東大螢雪会講師　上野 尚人

東京慈恵会医科大学の数学は，制限時間90分で大問４つが出題されます。大問１は答のみを記入する客観式，大問２から大問４は記述式です。今回の予想問題では７割程度の得点を目指してください。

1 次の $\boxed{}$ にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ。

(1) サイコロ３個を振ったとき，出た目の積が素数になる確率は $\boxed{（ア）}$ であり出た目の和が素数になる確率は $\boxed{（イ）}$ である。ただしどのサイコロも１から６までの目が等確率で出るものとする。

(2) x の３次方程式 $x^3-ax^2+28x-b=0$ が３つの正の整数の解（重解含む）をもつとき，a の値は $\boxed{（ウ）}$，b の値は $\boxed{（エ）}$ である。

2 xy 平面上に３点 $\mathrm{O}(0,0)$，$\mathrm{A}(5,0)$，$\mathrm{B}(4,4\sqrt{3})$ をとり，三角形 OAB の内部に点 P をとって

$$\angle\mathrm{OPA}=\angle\mathrm{APB}=\angle\mathrm{BPO}=120^\circ$$

となるようにする。このとき線分 OP の長さを求めよ。

3 xy 平面上に３点 $\mathrm{O}(0,0)$，$\mathrm{A}(2,2\sqrt{3})$，$\mathrm{B}(4,4\sqrt{3})$ をとり正三角形 OAB をつくる。辺 OA 上に点 P，辺 OB 上に点 Q をとり，三角形 OPQ の面積が三角形 OAB の面積の半分になるようにする。

(1) 点 P の x 座標を t とするとき，t のとりえる範囲を求めよ。また，直線 PQ の方程式を t を用いて表せ。

(2) (1)で求めた直線 PQ は双曲線 $C:3x^2-y^2+6=0$ に接することを示せ。

(3) 線分 PQ の通過領域を図示せよ。

4 $x>0$ の範囲で定義された関数 $f(x)$，$g(x)$ があり，任意の正の数 a, b に対して

$$\int_a^b f(x)\,dx=g\left(\frac{b}{a}\right)$$

が成立する。$f(1)=1$ であるとき，$f(x)$ および $g(x)$ を求めよ。

$\boxed{1}$ 【解】

(1)　3つの目の積が素数になるのは

$1\cdot1\cdot2=2,\ 1\cdot1\cdot3=3,\ 1\cdot1\cdot5=5$

の3つの場合のみ。サイコロを区別するとそれぞれの場合の目の出方は

$\dfrac{3!}{2!\cdot1!}=3$ 通りずつ

になるので，その確率は

$\dfrac{3\cdot3}{6^3}=\dfrac{1}{24}\cdots\boxed{\text{ア}}$

3つの目の和は3から18までであり，そのうち素数は3，5，7，11，13，17である。

- 和が3になるとき
  $1+1+1$（1通り）のみ
- 和が5になるとき
  $1+1+3$（3通り），$1+2+2$（3通り）
  あわせて6通り
- 和が7になるとき
  $1+1+5$（3通り），$1+2+4$（6通り），
  $1+3+3$（3通り），$2+2+3$（3通り）
  あわせて15通り
- 和が11になるとき
  $1+4+6$（6通り），$1+5+5$（3通り），
  $2+3+6$（6通り），$2+4+5$（6通り），
  $3+3+5$（3通り），$3+4+4$（3通り）
  あわせて27通り
- 和が13になるとき
  $1+6+6$（3通り），$2+5+6$（6通り），
  $3+4+6$（6通り），$3+5+5$（3通り），
  $4+4+5$（3通り）
  あわせて21通り
- 和が17になるとき
  $5+6+6$（3通り）のみ

以上より和が素数になる確率は

$\dfrac{1+6+15+27+21+3}{6^3}=\dfrac{73}{216}\cdots\boxed{\text{イ}}$

(2)　3つの正の整数解を

$\alpha,\beta,\gamma\,(\alpha\leqq\beta\leqq\gamma)$

とおく。3次方程式の解と係数の関係より

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=28\cdots(*)$

が成立。

$\alpha\beta\geqq\alpha^2,\ \beta\gamma\geqq\alpha^2,\ \gamma\alpha\geqq\alpha^2$

より

$\alpha^2+\alpha^2+\alpha^2\leqq\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=28$

$3\alpha^2\leqq28$

これをみたす正の整数 α は $1,2,3$ に限られる。

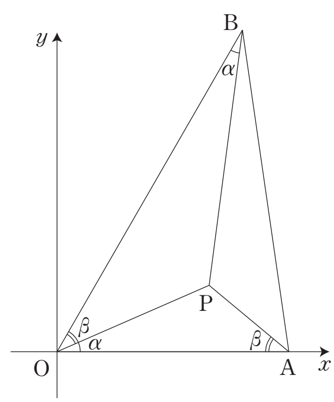
- $\alpha=1$ のとき $(*)$ より
  $\beta+\beta\gamma+\gamma=28$
  $(\beta+1)(\gamma+1)=29$
  $\beta+1,\ \gamma+1$ はいずれも2以上の整数なのでこの等式が成立することはない。
- $\alpha=2$ のとき $(*)$ より
  $2\beta+\beta\gamma+2\gamma=28$
  $(\beta+2)(\gamma+2)=32$
  $\beta+2,\ \gamma+2$ はいずれも3以上の整数なので
  $\beta+2=4,\ \gamma+2=8$
  よって $(\alpha,\beta,\gamma)=(2,2,6)$ が得られる。
- $\alpha=3$ のとき $(*)$ より
  $3\beta+\beta\gamma+3\gamma=28$
  $(\beta+3)(\gamma+3)=37$
  $\beta+3,\ \gamma+3$ はいずれも4以上の整数なのでこの等式が成立することはない。

以上より $(\alpha,\beta,\gamma)=(2,2,6)$ であり，3次方程式の解と係数の関係より

$a=\alpha+\beta+\gamma=10\cdots\boxed{\text{ウ}}$

$b=\alpha\beta\gamma=24\cdots\boxed{\text{エ}}$

$\boxed{2}$ 【解】



$\angle\mathrm{AOP}=\alpha,\ \angle\mathrm{BOP}=\beta$

とおく。$\alpha+\beta=60^\circ$ であり，

$\angle\mathrm{OPA}=\angle\mathrm{OPB}=120^\circ$ なので

$\angle\mathrm{PAO}=180^\circ-(120^\circ+\alpha)=60^\circ-\alpha=\beta$

$\angle\mathrm{PBO}=180^\circ-(120^\circ+\beta)=60^\circ-\beta=\alpha$

より

$\triangle POA \backsim \triangle PBO$

といえる。OA＝5, OB＝8 より相似比は 5 ： 8 である。

$OP=x\,(>0)$ とおくと

$$AP=\frac{5}{8}x,\ BP=\frac{8}{5}x$$

である。三角形 OAP に余弦定理を適用して

$$OA^2=OP^2+AP^2-2\cdot OP\cdot AP\cdot\cos 120^\circ$$

$$25=x^2+\frac{25}{64}x^2-2\cdot x\cdot\frac{5}{8}x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$25=\frac{129}{64}x^2$$

$$x=\frac{40}{\sqrt{129}}\ (>0)\ \cdots\cdots(答)$$

3 【解】

(1)　$P(t,\sqrt{3}\,t)$, $Q(-u,\sqrt{3}\,u)$ とおく。

$\overrightarrow{QP}(t+u,\sqrt{3}(t-u))$ に垂直なベクトル $(\sqrt{3}(t-u),-(t+u))$ をとることで，直線 PQ の方程式は

$$\sqrt{3}(t-u)(x-t)-(t+u)(y-\sqrt{3}\,t)=0$$

とわかる。ここで $OA=OB=4$, $OP=2t$, $OQ=2u$ である。面積の条件より

$$\frac{1}{2}OA\cdot OB\cdot\sin 60^\circ\div 2=\frac{1}{2}OP\cdot OQ\cdot\sin 60^\circ$$

なので $u=\dfrac{2}{t}$

これを直線の式に代入して

$$\sqrt{3}\left(t-\frac{2}{t}\right)(x-t)-\left(t+\frac{2}{t}\right)(y-\sqrt{3}\,t)=0$$

$$\sqrt{3}(t^2-2)(x-t)-(t^2+2)(y-\sqrt{3}\,t)=0$$

$$\sqrt{3}(t^2-2)x-(t^2+2)y+4\sqrt{3}\,t=0\ \cdots\cdots(答)$$

また，$tu=2$ より t の範囲は

$$1\leqq t\leqq 2\ \cdots\cdots(答)$$

(2)　直線 PQ の方程式を変形して

$$y=\sqrt{3}\cdot\frac{(t^2-2)x+4t}{t^2+2}$$

これを双曲線 C の式に代入，変形して

$$x^2-\left(\frac{(t^2-2)x+4t}{t^2+2}\right)^2+2=0$$

$$(t^2+2)^2x^2-((t^2-2)x+4t)^2+2(t^2+2)^2=0$$

$$8t^2x^2-8t(t^2-2)x+2(t^2-2)^2=0$$

$$2(2tx-(t^2-2))^2=0$$

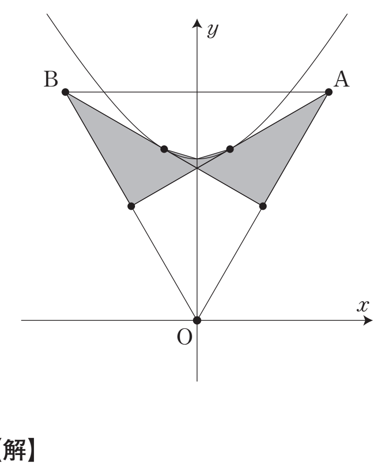
これを x の 2 次方程式とみると $x=\dfrac{t^2-2}{2t}$ が重解となり，直線 PQ と双曲線 E は点 $\left(\dfrac{t^2-2}{2t},\sqrt{3}\cdot\dfrac{t^2+2}{2t}\right)$ で接することがわかる。

【証明終】

(3)　$t=1$ のとき $P(1,\sqrt{3})$, $Q(-2,2\sqrt{3})$ であり直線 PQ の方程式は $-\sqrt{3}\,x-3y+4\sqrt{3}=0$ であり，双曲線 C との接点は $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$t=2$ のとき $P(2,2\sqrt{3})$, $Q(-1,\sqrt{3})$ であり直線 PQ の方程式は $2\sqrt{3}\,x-6y+8\sqrt{3}=0$ であり，双曲線 C との接点は $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

直線 PQ がつねに双曲線 C に接すること，線分 PQ の両端はつねに正三角形の辺上にあることより求める通過領域は図のようになる。



4 【解】

与式の両辺に $b=a$ を代入することで

$$g(1)=0$$

とわかる。また，与式の両辺を b について微分すると

$$f(b)=g'\left(\frac{b}{a}\right)\cdot\frac{1}{a}\cdots①$$

この等式が任意の正の数 a, b に対して成立す

るので，$a=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$，$b=1$ とすると

$$f(1)=g'(x)\cdot x$$

ここで $f(1)=1$ より

$$g'(x)=\frac{1}{x}\cdots②$$

②を①に代入することで

$$f(b)=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{a}$$

これが任意の正の整数 a, b に対して成立するので

$$f(x)=\frac{1}{x}\cdots\cdots(答)$$

また，②の両辺を x について積分して

$$g(x)=\log x+C\ (C\text{ は積分定数})$$

これと $g(1)=0$ より

$$g(x)=\log x\cdots\cdots(答)$$

【受験生へのアドバイス】

大問１の小問集合には「場合の数と確率」の分野が入ることが多く，ある程度の列挙が必要な出題が見受けられます。大問２から４の記述式問題は毎年内容・計算量ともに重厚な出題が続いています。（ある年には東京大学の問題と内容が重なったことがあります）国公立大学上位校の過去問なども参考にしておくとよいでしょう。

【補充事項】

大問２で扱った，三角形 OAB の内部にあって $\angle\mathrm{OPA}=\angle\mathrm{APB}=\angle\mathrm{BPO}=120^\circ$ をみたす点は「フェルマー点」と呼ばれ，OP＋AP＋BP の大きさを最小にする点であることが知られています。ただし，三角形の内角の中に 120° より大きい角があればその頂点がフェルマー点となります。

来月号では，昭和大学医学部の数学を攻略しますので，ご期待ください！

全12校の掲載予定は以下のとおりとなっております。

第97回／４月号　東邦大学医学部
第98回／５月号　東京女子医科大学
第99回／６月号　金沢医科大学
第100回／７月号　岩手医科大学医学部
第101回／８・９月合併号　北里大学医学部
第102回／10月号　日本大学医学部
第103回／10月臨時増刊号 聖マリアンナ医科大学
第104回／11月号　愛知医科大学医学部
第105回／12月号　東京医科大学
第106回／１・２月合併号　杏林大学医学部
第107回／３月臨時増刊号　東京慈恵会医科大学
第108回／３月号　昭和大学医学部