東大螢雪会 **医学部数学** 攻略演習

マンツーマン指導で医歯薬学部に多くの合格者を輩出している「東大螢雪会」では，主要な私立大学医学部の予想問題を作成しています。このコーナーでは，「東大螢雪会」の作成した予想問題を用いて，主要な私立大学医学部の数学を攻略するための演習を行います。毎号１校分の演習を行い，全12校の連載となる予定です。

今月号では，日本大学医学部の数学を攻略します！

第102回 日本大学医学部 編

東大螢雪会講師　上野 尚人

日本大学医学部の数学は，制限時間75分で大問５つが出題されます。大問１と大問２は４問ずつの小問集合（大学入試センター試験と同様のマークセンス式），大問３はマークセンス式の誘導がある大問，大問４および大問５は記述式です。今回の予想問題では７割程度の得点を目指してください。

$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$は，マークシートに解答を記入しなさい。ただし，分数は既約分数で答え，平方根を含む解答は平方根の中をできるだけ簡潔にして答えなさい。問題$\boxed{4}$，$\boxed{5}$は，「数学記述式問題解答用紙」に解答しなさい。

$\boxed{1}$ ⑴　４次方程式 $x^4+ax^2+b=0$ が４つの異なる実数解をもち，その４つの解を小さい順に並べると等差数列をなす。このとき，$a<\boxed{1}$ かつ $b=\dfrac{\boxed{2}}{\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}}a^2$ である。

⑵　xy 平面において，２つの放物線

$$\begin{cases} y=2x^2 \\ y=-x^2+3x-\dfrac{57}{4} \end{cases}$$

の両方に接する直線は $y=\boxed{6}x-\boxed{7}$ と $y=-\boxed{8}x-\boxed{9}$ である。

⑶　半径１の円に内接する正八角形 ABCDEFGH を考える。この頂点のひとつ A から５本の対角線 AC，AD，AE，AF，AG を引いたとき，この５本の長さの積は $\boxed{10}+\boxed{11}\sqrt{\boxed{12}}$ である。

⑷　１から６までの目が等確率で出るサイコロ１個を３回投げて，出た目を順に a, b, c とする。この３つの数字を順に並べて７進法の３桁の整数 $abc_{(7)}$ をつくり，その整数を10進法に直した整数を $N_{(10)}$ とする。N が２の倍数となる確率は $\dfrac{\boxed{13}}{\boxed{14}}$ であり，N が３の倍数となる確率は $\dfrac{\boxed{15}}{\boxed{16}}$ である。

2 (1) xy 平面において，２つの直線

$$\begin{cases} y=\dfrac{5}{12}x+\dfrac{7}{12} \\ y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

から等距離にある点の軌跡は，２本の直線 $y=\dfrac{\boxed{17}}{\boxed{18}}x+\dfrac{\boxed{19}}{\boxed{20}}$ と

$y=-\dfrac{\boxed{21}}{\boxed{22}}x+\dfrac{\boxed{23}\,\boxed{24}}{\boxed{25}}$ である。

(2) 関数 $y=\dfrac{6x+8}{x^2+1}$ において $x=\tan\theta$ とおくと $y=\boxed{26}\sin 2\theta+\boxed{27}\cos 2\theta+\boxed{28}$ と変形できる。x がすべての実数を取り得るとき $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とすることで y の最大値は $\boxed{29}$，最小値は $\boxed{30}\,\boxed{31}$ とわかる。

(3) 三角形 ABC は $\dfrac{\sin A}{7}=\dfrac{\sin B}{8}=\dfrac{\sin C}{9}$ を満たす。この三角形の最大角を θ とすると $\cos\theta=\dfrac{\boxed{32}}{\boxed{33}}$ である。

(4) 数列 $\{a_n\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ を次の式によって定める。

$$\begin{cases} a_1=2,\ a_2=5 \\ a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n \end{cases}$$

$a_n>10^{10}$ を満たす最小の正の整数 n の値は $\boxed{34}\,\boxed{35}$ である。ただし $\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

3 座標空間内に４点 O$(0, 0, 0)$，A$(6, 0, 0)$，B$(0, 3, 0)$，C$(0, 0, 2)$ をとる。以下の問に答えなさい。

(1) 四面体 OABC の体積は $\boxed{36}$ である。

(2) 三角形 ABC の面積は $\boxed{37}\sqrt{\boxed{38}\,\boxed{39}}$ である。

(3) ３点 A, B, C を通る平面 α の方程式は $x+\boxed{40}\,y+\boxed{41}\,z=\boxed{42}$ であり，原点 O から平面 α におろした垂線の長さは $\dfrac{\boxed{43}\sqrt{\boxed{44}\,\boxed{45}}}{\boxed{46}}$ である。

4 xy 平面上に楕円 E : $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ および円 C : $x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ をとる。以下の問に答えなさい。

(1) 楕円 E 上に４点 P$(5, 0)$，Q$(0, 3)$，R$(-5, 0)$，S$(0, -3)$ をとる。四角形 PQRS の４つの辺がすべて円 C に接するときの r の値を求めなさい。

(2) r は(1)で求めた値とする。このとき，楕円 E 上の任意の点 T に対して「点 T を頂点のひとつとす

るひし形で，４つの頂点がすべて楕円 E 上にあり，かつ４つの辺がすべて円 C に接するもの」が存在することを示しなさい。

$\boxed{5}$　xy 平面において方程式 $x^2-xy+y^2=1$ で表される曲線を C とする。以下の問に答えなさい。

⑴　C の概形を描きなさい。（曲線の凹凸は調べなくてよい）

⑵　曲線 C で囲まれる部分の面積を求めなさい。

⑶　不等式 $x^2-xy+y^2 \leqq 1$ で表される領域を D とする。D を x 軸の周りに１回転させて得られる立体の体積を求めなさい。

$\boxed{1}$　**【出題意図と方針】**

大問１および大問２は，近年の出題傾向をふまえ「数学Ⅰ・A・Ⅱ・B各分野にわたる小問集合８問」としました。近年は小問集合の難度が標準レベルに落ち着いており，ここで確実に得点を重ねておきたいところです。

【解】

⑴　$x^2=t$ とおく。t の２次方程式 $t^2+at+b=0$ が２つの正の実数解

$$t=p, q\ (0<p<q)$$

をもつとき，与えられた x の４次方程式の解は

$$x=\pm\sqrt{p}, \pm\sqrt{q}$$

となる。この４つを小さい順に並べると

$$-\sqrt{q}, -\sqrt{p}, \sqrt{p}, \sqrt{q}$$

となる。この４つが等差数列になるとき

$$2(-\sqrt{p})=-\sqrt{q}+\sqrt{p}$$

より $q=9p$ となる。解と係数の関係より

$$p+9p=-a,\ p\cdot 9p=b$$

が成立。$p>0$ より

$$a<0 \cdots \boxed{1}$$

であり，p を消去して

$$b=\frac{9}{100}a^2 \cdots \frac{\boxed{2}}{\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}}$$

⑵　求める直線の方程式を $y=px+q$ とする。

$$2x^2=px+q$$

を変形して

$$2x^2-px-q=0$$

これが重解をもつので，判別式を考えて

$$(-p)^2-4\cdot 2\cdot(-q)=0$$

よって

$$8q=-p^2 \cdots ①$$

$$-x^2+3x-\frac{57}{4}=px+q$$

を変形して

$$x^2+(p-3)x+\left(q+\frac{57}{4}\right)=0$$

これが重解をもつので同様に

$$(p-3)^2-4\left(q+\frac{57}{4}\right)=0$$

よって

$$4q=p^2-6p-48 \cdots ②$$

②×２－①より

$$3p^2-12p-96=0$$

$$3(p-8)(p+4)=0$$

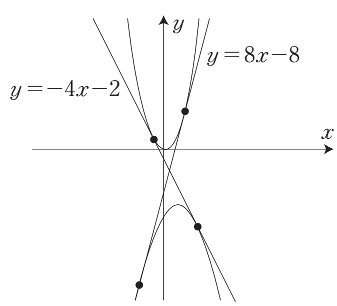
より $p=8, -4$　よって

$$(p, q)=(8, -8), (-4, -2)$$

より求める２直線の方程式は

$$y=8x-8,\ y=-4x-2$$

$$\cdots \boxed{6}, \boxed{7}, \boxed{8}, \boxed{9}$$



⑶　AE が円の直径であり，直径に対する円周角は直角なので三角比で考えて

$$\mathrm{AC}=\mathrm{AG}=2\cos 45^\circ$$

$\mathrm{AD}=\mathrm{AF}=2\cos 22.5^\circ$

$\mathrm{AE}=2$

である。よって

$$\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AG}=(4\cos 45^\circ)^2=4\cdot\frac{1}{2}=2$$

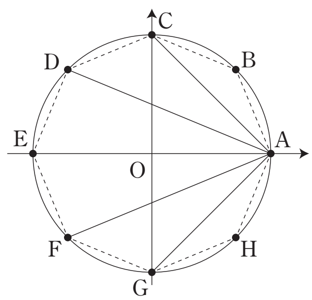
$$\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AF}=(4\cos 22.5^\circ)^2$$

$$=4\cdot\frac{1+\cos 45^\circ}{2}=2+\sqrt{2}$$

なので求める積は

$$2\cdot(2+\sqrt{2})\cdot 2=8+4\sqrt{2}$$

$$\cdots\boxed{10}+\boxed{11}\sqrt{\boxed{12}}$$



(4)　a, b, c の組合せは全部で $6^3=216$ 通りでありこれらはすべて等確率である。

$$N=a\cdot 7^2+b\cdot 7^1+c\cdot 7^0=49a+7b+c$$

である。ここで

$$N=(a+b+c)+(48a+6b)$$
$$=(a+b+c)+6(8a+b)$$

であり，$6(8a+b)$ は 2 の倍数かつ 3 の倍数。よって「N が 2 の倍数」と「$a+b+c$ が 2 の倍数」は同値であり，「N が 3 の倍数」と「$a+b+c$ が 3 の倍数」も同値である。

$a+b+c$ が 2 の倍数になるのは「a, b, c がすべて偶数…①」または「a, b, c のうち 1 つが偶数で残り 2 つが奇数…②」のいずれかの場合。①は $3^3=27$ 通り，②は $(3^3)\cdot {}_3\mathrm{C}_1=81$ 通りなので求める確率は

$$\frac{27+81}{216}=\frac{1}{2}\cdots\frac{\boxed{13}}{\boxed{14}}$$

$a+b+c$ が 3 の倍数になるのは「a, b, c がすべて 3 の倍数…③」「a, b, c がすべて 3 で割って 1 余る数…④」「a, b, c がすべて 3 で割って 2 余る数…⑤」「a, b, c のうち 1 つが 3 の倍数，1 つが 3 で割って 1 余る数，残りが 3 で割って 2 余る数…⑥」のいずれかの場合。③，④，⑤はそれぞれ $2^3=8$ 通り，⑥は $(2^3)\cdot 3!=48$ 通りなので求める確率は

$$\frac{8\cdot 3+48}{216}=\frac{1}{3}\cdots\frac{\boxed{15}}{\boxed{16}}$$

$\boxed{2}$ **【解】**

(1)　2 つの直線は

$$l: 5x-12y+7=0,\ m: 4x-3y-1=0$$

と書き換えられる。点 P(x, y) から l までの距離は

$$\frac{|5x-12y+7|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\frac{|5x-12y+7|}{13}$$

であり，m までの距離は

$$\frac{|4x-3y-1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|4x-3y-1|}{5}$$

である。この 2 つが等しいとき

$$\frac{|5x-12y+7|}{13}=\frac{|4x-3y-1|}{5}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5x-12y+7}{13}\right)^2=\left(\frac{4x-3y-1}{5}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 5(5x-12y+7)=\pm 13(4x-3y-1)$$

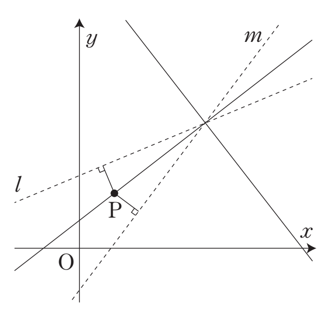
$$\Leftrightarrow 25x-60y+35=\pm(52x-39y-13)$$

$$\Leftrightarrow -27x-21y+48=0,\ 77x-99y+22=0$$

これを変形して

$$y=\frac{7}{9}x+\frac{2}{9},\ y=-\frac{9}{7}x+\frac{16}{7}$$

$$\cdots\frac{\boxed{17}}{\boxed{18}},\ \frac{\boxed{19}}{\boxed{20}},\ -\frac{\boxed{21}}{\boxed{22}},\ \frac{\boxed{23}\boxed{24}}{\boxed{25}}$$



(2)　$$y=\frac{6\tan\theta+8}{\tan^2\theta+1}=(6\tan\theta+8)\cos^2\theta$$

$=6\sin\theta\cos\theta+8\cos^2\theta$

$=3\sin 2\theta+8\cdot\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$

$=3\sin 2\theta+4\cos 2\theta+4$

$\cdots\boxed{26}, \boxed{27}, \boxed{28}$

三角関数の合成を行って

$y=5\sin(2\theta+\alpha)+4$

$\left(\cos\alpha=\dfrac{3}{5}, \sin\alpha=\dfrac{4}{5}\right)$

となる。$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より

$-\pi+\alpha<2\theta+\alpha<\pi+\alpha$

とわかり $\sin(2\theta+\alpha)$ の最大値は 1，最小値は

-1 とわかる。よって y の最大値は $9\cdots\boxed{29}$,

最小値は $-1\cdots\boxed{30}\boxed{31}$

(3)　△ABC の外接円の半径を R,

$BC=a, CA=b, AB=c$

とする。正弦定理より

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$，$\sin B=\dfrac{b}{2R}$，$\sin C=\dfrac{c}{2R}$

である。これを与式に代入して

$\dfrac{a}{7\cdot 2R}=\dfrac{b}{8\cdot 2R}=\dfrac{c}{9\cdot 2R}$

となるので，正の数 k を用いて

$a=7k$，$b=8k$，$c=9k$

と表せる。最大角 θ は最大辺 c の対角なので

$\cos\theta=\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$=\dfrac{49k^2+64k^2-81k^2}{2\cdot 7k\cdot 8k}=\dfrac{32}{2\cdot 7\cdot 8}$

$=\dfrac{2}{7}\cdots\dfrac{\boxed{32}}{\boxed{33}}$

(4)　与えられた漸化式に対して，x の 2 次方程式（漸化式の特性方程式）$x^2=5x-6$ を解くと

$x=2, 3$

漸化式の両辺から $2a_{n+1}$ を引いて

$a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n)$

となり，$\{a_{n+1}-2a_n\}$ は公比 3 の等比数列とわかる。よって

$a_{n+1}-2a_n=(a_2-2a_1)\cdot 3^{n-1}$

$=3^{n-1}\cdots$①

漸化式の両辺から $3a_{n+1}$ を引いて

$a_{n+2}-3a_{n+1}=2(a_{n+1}-3a_n)$

となり，$\{a_{n+1}-3a_n\}$ は公比 2 の等比数列とわかる。よって

$a_{n+1}-3a_n=(a_2-3a_1)\cdot 2^{n-1}$

$=-2^{n-1}\cdots$②

①－②より

$a_n=3^{n-1}+2^{n-1}$

とわかる。この数列は n に対して単調に増加する。この値が 10^{10} に近くなるときを調べる。

$3^{n-1}\fallingdotseq 10^{10}$

$\log_{10} 3^{n-1}\fallingdotseq\log_{10} 10^{10}$

$(n-1)\log_{10} 3\fallingdotseq 10$

$n\fallingdotseq 1+10\div\log_{10} 3=21.9\ldots$

よって $n=22$ の近辺を調べる。

$a_{22}=3^{21}+2^{21}>3^{21}$

であり

$\log_{10} 3^{21}=21\log_{10} 3=21\cdot 0.4771$

$=10.01\ldots>10$

より $a_{22}>10^{10}$

$a_{21}=3^{20}+2^{20}<3^{20}+3^{20}=2\cdot 3^{20}$

であり

$\log_{10}(2\cdot 3^{20})=\log_{10} 2+20\log_{10} 3$

$=9.8\ldots<10$

より $a_{21}<10^{10}$

$a_{21}<10^{10}<a_{22}$ であり a_n は単調増加列なので，

$n=22\cdots\boxed{34}\boxed{35}$

3 【出題意図と方針】

本学で出題頻度の高い「空間図形とベクトル」の分野の問題です。(2)で用いた「ベクトルによる三角形の面積の求め方」は必須公式です。(3)の前半に現れる「空間座標における平面の方程式」は私大医学部上位校での出題頻度が高くなっています。(3)の後半は，「点と平面の距離公式」でも処理できますが(1)および(2)の結果を用いたほうが容易に求められます。

【解】

⑴　OA, OB, OC は互いに垂直なので

$$\triangle \mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{OA}\cdot \mathrm{OB}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3=9$$

四面体 OABC の体積は

$$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle \mathrm{OAB}\cdot \mathrm{OC}=\frac{1}{3}\cdot 9\cdot 2$$

$$=6\cdots\boxed{36}$$

⑵　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-6,3,0)$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-6,0,2)$

より

$\triangle \mathrm{ABC}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{45\cdot 40-36^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{9\cdot 4\cdot(5\cdot 10-36)}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{9\cdot 4\cdot 14}$$

$$=3\sqrt{14}\cdots\boxed{37}\sqrt{\boxed{38}\boxed{39}}$$

⑶　平面の方程式を

$\alpha : x+ly+mz=n$

とおく。点 A, B, C を通るのでその座標を順に代入して

$6=n,\ 3l=n,\ 2m=n$

これを解いて$(l,m,n)=(2,3,6)$

よって

$\alpha : x+2y+3z=6$

$\cdots\boxed{40},\boxed{41},\boxed{42}$

点と平面の距離公式より，原点 O から $\alpha : x+2y+3z-6=0$ におろした垂線の長さは

$$\frac{|-6|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\frac{6}{\sqrt{14}}$$

$$=\frac{3\sqrt{14}}{7}\cdots\frac{\boxed{43}\sqrt{\boxed{44}\boxed{45}}}{\boxed{46}}$$

● **(別解)**　垂線の長さを h とすると，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle \mathrm{ABC}\cdot h$$

$$6=\frac{1}{3}\cdot 3\sqrt{14}\cdot h$$

よって

$$h=\frac{3\sqrt{14}}{7}\ \cdots\cdots(答)$$

4 **【出題意図と方針】**

「ポンスレ（Poncelet）の閉形定理」と呼ばれる事実をもとにした出題です。この問題は楕円と円を題材に四角形（ひし形）の存在条件を扱っていますが，一般には同一平面上の 2 つの 2 次曲線と多角形に関して成立する定理です。

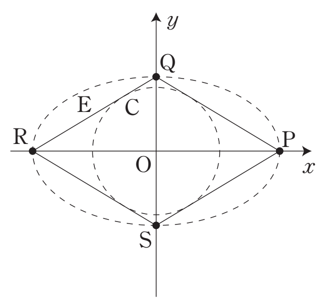
【解】

⑴　四角形 PQRS はひし形であり原点 O に関して点対称かつ x 軸，y 軸に関して線対称である。よって辺 PQ が円 C と接する条件を求めればよい。直線 PQ の方程式は

$$\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1 \Leftrightarrow 3x+5y-15=0$$

原点からこの直線までの距離が r と等しいので

$$r=\frac{|-15|}{\sqrt{3^2+5^2}}=\frac{15}{\sqrt{34}}\ \cdots\cdots(答)$$



⑵　題意をみたすひし形 TUVW が存在することを示す。このひし形が原点 O 中心の円 C に外接していれば，対角線 TV および UW は互いに直交し，その交点 O は対角線の中点となる。

$\mathrm{OT}=\mathrm{OV}=a,\ \mathrm{OU}=\mathrm{OW}=b$

とおく。T の座標を$(a\cos t,\ a\sin t)$とおくと

$$\mathrm{U}\left(b\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right),\ b\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$=(-b\sin t,\ b\cos t)$$

$$\mathrm{V}\left(a\cos(t+\pi),\ a\sin(t+\pi)\right)$$
$$=(-a\cos t, -a\sin t)$$
$$\mathrm{W}\left(b\cos\left(t+\frac{3\pi}{2}\right),\ b\sin\left(t+\frac{3\pi}{2}\right)\right)$$
$$=(b\sin t, -b\cos t)$$

とおける。点 T が楕円 E 上にあるとき

$$\frac{a^2\cos^2 t}{25}+\frac{a^2\sin^2 t}{9}=1$$

より

$$\frac{1}{a^2}=\frac{\cos^2 t}{25}+\frac{\sin^2 t}{9}\ \cdots①$$

U が楕円 E 上にあるときも同様に

$$\frac{1}{b^2}=\frac{\sin^2 t}{25}+\frac{\sin^2 t}{9}\ \cdots②$$

$$\overrightarrow{\mathrm{TU}}=(-b\sin t-a\cos t,\ b\cos t-a\sin t)$$

より，直線 TU の法線ベクトルのひとつは

$$(b\cos t-a\sin t,\ b\sin t+a\cos t)$$

である。よって直線 TU の方程式は

$$(b\cos t-a\sin t)(x-a\cos t)$$
$$+(b\sin t+a\cos t)(y-a\sin t)=0$$
$$\Leftrightarrow (b\cos t-a\sin t)x$$
$$+(b\sin t+a\cos t)y-ab=0$$

原点 O から直線 TU までの距離は

$$d=\frac{|-ab|}{\sqrt{(b\cos t-a\sin t)^2+(b\sin t+a\cos t)^2}}$$
$$=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

よって

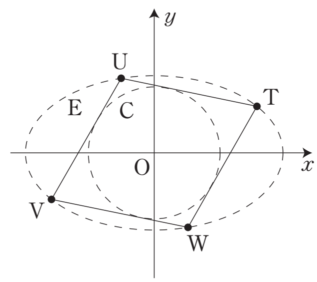
$$\frac{1}{d^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\ \cdots③$$

①，②が成立するときこれらを③に代入して

$$\frac{1}{d^2}=\frac{1}{25}+\frac{1}{9}=\frac{34}{225}$$

より $d=\dfrac{15}{\sqrt{34}}$ よって $d=r$

以上より，楕円 E 上に任意の点 T をとるとき(①)，同じ楕円上に点 U, V, W を①，②をみたすようにとれば四角形 TUVW はひし形となり，$d=r$ よりその各辺は円 C に接する。よって題意は示された。【証明終】



5 【出題意図と方針】

本学の論述問題で出題頻度の高い，数学Ⅲ分野の微分・積分の総合問題を出題しました。曲線の概形を描かせるケースが多いので，微積分の計算にくわえて増減表や概形も描く練習が大切です。

(1) $x^2-xy+y^2=1$

$$\Leftrightarrow y^2-xy+(x^2-1)=0$$

これを y の 2 次方程式とみて解の公式で解くと

$$y=\frac{x\pm\sqrt{-3x^2+4}}{2}$$

ここで

$$f(x)=\frac{x+\sqrt{-3x^2+4}}{2}$$
$$g(x)=\frac{x-\sqrt{-3x^2+4}}{2}$$

とおく。$-3x^2+4\geqq 0$ より，$f(x), g(x)$ いずれも定義域は

$$-\frac{2}{\sqrt{3}}\leqq x\leqq\frac{2}{\sqrt{3}}$$

である。

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{-6x}{2\sqrt{-3x^2+4}}\right)$$

であり，$f(x)=0$ とすると

$$\sqrt{-3x^2+4}=3x$$
$$-3x^2+4=9x^2\ (3x\geqq 0)$$

よって $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$g'(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{-6x}{2\sqrt{-3x^2+4}}\right)$$

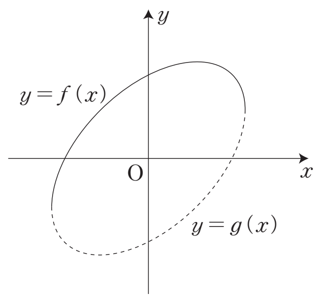
であり，$f(x)=0$ とすると

$$\sqrt{-3x^2+4}=-3x$$
$$-3x^2+4=9x^2\ (-3x\geqq 0)$$

よって $x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

x	$-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	↗	極大	↘	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

x	$-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	↘	極小	↗	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$



(2) $\displaystyle\int_{-\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}}(f(x)-g(x))\,dx$

$\displaystyle=\int_{-\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}}\sqrt{-3x^2+4}\,dx$

$\displaystyle=\sqrt{3}\int_{-\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}}\sqrt{\frac{4}{3}-x^2}\,dx$

ここで

$$S=\int_{-\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}}\sqrt{\frac{4}{3}-x^2}\,dx$$

とおくと，S は半円

$$x^2+y^2=\frac{4}{3}\ (y\geqq 0)$$

と x 軸で囲まれた部分の面積でありこの値は

$$\frac{1}{2}\cdot\pi\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2=\frac{2}{3}\pi$$

よって求める図形の面積は

$$\sqrt{3}\cdot\frac{2}{3}\pi=\frac{2}{\sqrt{3}}\pi\ \cdots\cdots(答)$$

(3) 領域 D および D を x 軸に関して対称移動させた図形 D′ をあわせた図形を考え，これを x 軸のまわりに 1 回転させればよい。

$f(x)=-g(x)$ を解くと $x=0$ であり，D と D′ をあわせた図形は y 軸対称であることがわかる。

求める体積を V とすると，対称性を考えて

$\dfrac{V}{2\cdot\pi}=$

$\displaystyle\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}}(f(x))^2\,dx-\int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}}(g(x))^2\,dx$

$\displaystyle=\int_0^1(f(x))^2\,dx+\int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}}(f(x))^2\,dx$

$\displaystyle\quad-\int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}}(g(x))^2\,dx$

$\displaystyle=\int_0^1(f(x))^2\,dx$

$\displaystyle\quad+\int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}}(f(x))^2-(g(x))^2\,dx$

ここで

$\displaystyle\int_0^1(f(x))^2\,dx$

$\displaystyle=\int_0^1\frac{(-2x^2+4)+2x\sqrt{-3x^2+4}}{4}\,dx$

$\displaystyle=\int_0^1\left(-\frac{1}{2}x^2+1-\frac{1}{12}(-6x)\sqrt{-3x^2+4}\right)dx$

$\displaystyle=\left[-\frac{1}{6}x^3+x-\frac{1}{12}\cdot\frac{2}{3}(-3x^2+4)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$

$\displaystyle=\left(-\frac{1}{6}+1-\frac{1}{18}\right)-\left(0+0-\frac{4}{9}\right)=\frac{11}{9}$

また，

$\displaystyle\int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}}(f(x))^2-(g(x))^2\,dx$

$\displaystyle=\int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}}x\sqrt{-3x^2+4}\,dx$

$\displaystyle=\int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}}\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot(-6x)\sqrt{-3x^2+4}\,dx$

$\displaystyle=\left(-\frac{1}{6}\right)\left[\frac{2}{3}(-3x^2+4)^{\frac{3}{2}}\right]_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}}$

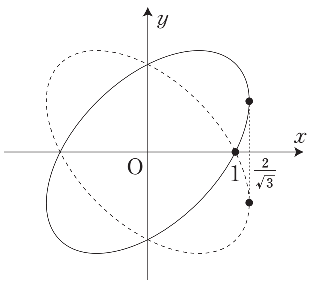
$\displaystyle=\left(-\frac{1}{6}\right)\left(0-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{9}$

よって

$$\frac{V}{2\pi}=\frac{11}{9}+\frac{1}{9}=\frac{4}{3}$$

であり，求める体積は

$$V=\frac{8\pi}{3}\ \cdots\cdots(答)$$



【受験生へのアドバイス】

大問1から3のマークセンス式問題は標準的な難度の出題が多く，大問4および大問5の記述式問題の難度が高めになっています。全体的に計算量が多く，時間内で処理するのは厳しいので「取れそうな問題を確実に取っていく」方向で解答していってください。内容的には図形（座標，ベクトル含む）の問題の比重が高いので「図形の概形を描く」作業をふだんから重視しておいてください。

●補充問題

1(3)に関して，今回は対角線の長さのみの積を出題しましたが，これに辺 AB および辺 AH の長さを掛けてみます。

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AH}=4\cos 67.5=2(1+\cos 135^\circ)=2-\sqrt{2}$$

となるので，AB から AH まで7本の積は

$$(2-\sqrt{2})\cdot 2\cdot(2+\sqrt{2})\cdot 2=8$$

となります。これに関しては次のような事実が有名で入試にも頻出です。

「半径1の円に内接する正 n 角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\ldots\mathrm{A}_n$ において，頂点のひとつ A_n と他の $n-1$ 個の頂点を結んだ $n-1$ 本の線分の長さの積は n である」

【証】

複素数 z についての n 次方程式

$$z^n=1 \cdots ①$$

の異なる n 個の解は

$$z_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\ (k=1, 2, \ldots, n)$$

である。$k=1$ に対応する解を α とおくとこれらの解は $z_k=\alpha^k$ と表され，また $z_n=1$ である。点 $\mathrm{A}_1(z_1)$ から $\mathrm{A}_n(z_n)$ を順に結ぶと，半径1の円に内接する正 n 角形が得られる。

方程式①を変形すると

$$(z-1)(z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z+1)=0 \cdots ②$$

となる。ここで

$$f(z)=z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z+1 \cdots ③$$

とおくと，z の $n-1$ 次方程式 $f(z)=0$ の異なる $n-1$ 個の解は①の解から $z=1$ を除いたもの，すなわち $\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}$ となる。よって

$$f(z)=(z-\alpha)(z-\alpha^2)\ldots(z-\alpha^{n-1}) \cdots ④$$

と因数分解される。③，④に $z=1$ を代入して

$$(1-\alpha)(1-\alpha^2)\ldots(1-\alpha^{n-1})=n$$

が得られ，両辺の絶対値をとることで

$$|1-\alpha|\,|1-\alpha^2|\ldots|1-\alpha^{n-1}|=n$$

となる。これは

$$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_1}\cdot\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_2}\cdot\cdots\cdot\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n-1}}=n$$

であることを表す。【証明終】

来月号では，聖マリアンナ医科大学の数学を攻略しますので，ご期待ください！

全12校の掲載予定は以下のとおりとなっております。

第97回／4月号　東邦大学医学部
第98回／5月号　東京女子医科大学
第99回／6月号　金沢医科大学
第100回／7月号　岩手医科大学医学部
第101回／8・9月合併号　北里大学医学部
第102回／10月号　日本大学医学部
第103回／10月臨時増刊号 聖マリアンナ医科大学
第104回／11月号　愛知医科大学医学部
第105回／12月号　東京医科大学
第106回／1・2月合併号　杏林大学医学部
第107回／3月臨時増刊号　東京慈恵会医科大学
第108回／3月号　昭和大学医学部