東大螢雪会 医学部数学 攻略演習

マンツーマン指導で医歯薬学部に多くの合格者を輩出している「東大螢雪会」では，主要な私立大学医学部の予想問題を作成しています。このコーナーでは，「東大螢雪会」の作成した予想問題を用いて，主要な私立大学医学部の数学を攻略するための演習を行います。毎号１校分の演習を行い，全12校の連載となる予定です。

今月号では，昭和大学医学部の数学を攻略します！

第94回 昭和大学医学部 編

東大螢雪会　数学科

昭和大学医学部の数学は，制限時間70分で大問４題の出題がされます。２問が答えのみを書く短答式，残りの２問は考え方も書く記述式で出題されるのが大きな特徴です。数学Ⅲ，確率、数列が頻出分野となっています。問題の量は多くはないですが、記述式の出題であるため解答を迅速にし，答案作成に時間をかけしっかりと記述する力が必要となります。７割程度の得点率が必要でしょう。今回の予想問題でも７割程度の得点率を目指してください。

$\boxed{1}$　以下の１）～３）の設問に対して，答えのみを下の解答欄に記入せよ。

１）　x^4+4-2i を複素数の範囲までで因数分解しなさい。

２）　$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ を微分しなさい。2017^{2018} と 2018^{2017} の大小を比較せよ。

３）　$f(x)$ は，微分可能な関数で，$f(-x)=f(x)+\int_1^x f(t)\,dt$，$f'(1)=1$，$f(1)=0$ を満たしている。

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+f(-x)-2}{x-1}$$

の値を求めよ。

$\boxed{2}$

Ａという遺伝子をもっているかどうかを診断する検査法がある。Ａという遺伝子をもっている人は，p の確率で陽性と判断され，$1-p$ の確率で陰性と判断される。また，Ａという遺伝子をもっていない人は，q の確率で陰性と判断され，$1-q$ の確率で陽性と判断されることがわかっている。Ａという遺伝子をもっている人が確率 r で存在するとして，以下の問いに答えよ。

１）　ある人が，この検査で陽性と判断され，実際にＡという遺伝子をもっている確率を求めなさい。

２）　この検査で陽性と判断された人が，実際にＡという遺伝子をもっている確率を求めなさい。

３）　$p=0.98$，$q=0.92$，$r=0.001$ であるとき，10000人の人がこの検査を受けたとき，陽性と判断される人は何人か。

$\boxed{3}$ 以下の１）〜３）の設問に対して，答えのみを下の解答欄に記入せよ。

$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2n}=a_n+\sqrt{6}\,b_n$（$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ および a_n，b_n は整数）とおくとき，次の問いに答えよ。

１） a_1，b_1，a_2，b_2 を求めよ。

２） $(a_1)^2-p(b_1)^2=1$ をとなる p の値を求めよ。

３） 点 $(a_{2018})^2-p(b_{2018})^2$ を求めなさい。

$\boxed{4}$ xy の平面上の点 $\mathrm{A}(0,1)$ を中心とし半径１の円を C とする。原点を O とし，$x\geqq 0$ にある C 上の点 Q をとり，$\angle\mathrm{OAQ}=\theta$ とおく $(0\leqq\theta\leqq\pi)$。Q における C の接線上に次の条件(i)，(ii)，(iii)を満たす点 $\mathrm{P}(x(\theta),\ y(\theta))$ をとる。

(i) $x(\theta)\geqq 0$

(ii) $y(\theta)$ は点 Q の y 座標に等しい。

(iii) 弧 $\overset{\frown}{\mathrm{OQ}}$ の長さと線分 QP の長さの和が π に等しい。

次の問いに答えよ。

１） $x(\theta)$ および $y(\theta)$ を求めよ。

２） $y(\theta)$ の最大値を求めよ。

３） θ が $0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲を動くとき，点 $\mathrm{P}(x(\theta),\ y(\theta))$ が描く曲線の長さを求めよ。

$\boxed{1}$

解　説

１）

極形式で求める複素数を表し，ド・モアブルの法則を使って考える解法と，４次方程式を考える解法があります。

４次方程式を解いて複素数の解を求めるためには，まず，複素数の範囲で因数分解しましょう。本問では，４次方程式を因数分解する解法を用いています。

２）

２つの値の大小を比較するのですが，底よりも指数が大きい方が値が大きくなるということは覚えておいて損はないと思います。本問では，2017^{2018} のほうが大きくなりそうです。

$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ の微分というヒントがあるので，これをうまく使う方方を考えましょう。

３）

関数の具体的な形がわからないので，単純に極限の計算を行うことができません。そこで，極限の式を微分係数の形に持っていくことになります。

微分係数の定義式 $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ はしっかり覚えて使えるようにしておきましょう。

$\int_1^x f_1 t_1 dt$ を x で微分すると $f(x)$ になることは必須事項となるのでよく確認しておきましょう。

解　答

１）

因数分解すると，

$x^4+4=(x^2+2i)(x^2-2i)\,x^2=2i$

x^4+4-2i

$(x^2-2i)(x^2+2i)=2i$

$x=a+bi$ とおくと

$a^2-b^2+2abi=2i$ より

$a^2-b^2=0,\ 2ab=2a=\pm b,\ ab=1$ したがって，

$a=1,\ b=1$

同様に考えて，$a=\pm 1,\ b=\mp 1$ 以上より

$x=\pm 1\mp i$ を解としてもつから，

$x^2+4-2i=(x-1-i)(x-1+i)(x+1-i)(x+1+i)$

となる。

２）

自然対数を取り比較する。

$$\log 15^{16} - \log 16^{15} = 15 \times 16\left(\frac{\log 15}{15} - \frac{\log 16}{16}\right)$$

であるから，$f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ を微分すると，

$f'(x) = \dfrac{1-\log x}{x^2}$ である。

$f'(x)$ は $x \geqq e$ のとき $f'(x) < 0$

より，$f(x)$ は $x \geqq e$ の範囲で減少する。

2017^{2018} と 2018^{2017} の自然な数をとって比較しても大小は変わらない。

$$\begin{aligned}
&\log 2017^{2018} - \log 2018^{2017} \\
&\quad = 2018\log 2017 - 2017\log 2018 \\
&\quad = 2018 \times 2017\frac{\log 2017}{2017} - 2017 \times 2018\frac{\log 2018}{2018} \\
&\quad = 2018 \times 2017\left(\frac{\log 2017}{2017} - \frac{\log 2018}{2018}\right)
\end{aligned}$$

ここで，$\dfrac{\log x}{x}$ が単調減少であるから，

$\dfrac{\log 2017}{2017} > \dfrac{\log 2018}{2018}$ である。

以上より，$\log 2017^{2018} > \log 2018^{2017}$ であるから

$2017^{2018} > 2018^{2017}$ である。

3）

$$f(-x) = f(x) + \int_1^x f(t)\,dt$$

$f(x)$ は微分可能な関数であるから，上の式を微分すると

$-f'(-x) = f'(x) + f(x)$

$x=1$ を代入して，

$-f'(-1) = f'(1) + f(1) = 1 + 0 = 1$

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+f(-x)-2}{x-1} \\
&\quad = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)+\left\{f(x)+\int_1^x f(t)\,dt\right\}-2}{x-1} \\
&\quad = \lim_{x\to 1} 2\cdot\frac{f(x)-1}{x-1} + \frac{\int_1^x f(t)\,dt}{x-1} \\
&\quad = \lim_{x\to 1} 2\cdot\frac{f(x)-f(1)}{x-1} + \frac{\int_1^x f(t)\,dt - \int_1^1 f(t)\,dt}{x-1} \\
&\quad = 2\left(\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right) + f(1) \\
&\quad = 2(f'(1)) + 0 \\
&\quad = 2
\end{aligned}$$

2

解　説

条件付き確率の問題となります。医学においては，様々な因子の影響を受けるため，原因を特定することが難しいという特徴があります。そのため，条件付き確率により分析をしていく必要があるため，非常に重要な分野となります。本問では，検査による陽性，陰性の判断，A という遺伝子をもっている，もっていないという 2 つの事象により要素がわかれています。条件付き確率では，条件とする事象を全事象として確率を求めていくので，問題を読んでも何が違うのかわかりにくいかもしれません。本問では，1）と 2）の違いをしっかり理解しているかどうかが，課題となります。条件付き確率の公式を覚えてあてはまめるだけでなく，何をしているのかしっかりイメージできるようにし

ておくと将来の役に立ちます。

解　答

1）　事象 A：ある人が A という遺伝子をもっている。

事象 B：ある人が検査で陽性と判断される。

とおく。

条件付き確率の公式より，

$P(\mathrm{B}\cap\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \mathrm{rp}$

である。2）$P(\mathrm{B})\mathrm{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{B}\cap\mathrm{A})$

であるから，

$$P(\mathrm{B})\mathrm{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{rp}}{\mathrm{rp}+(1-\mathrm{r})(1-\mathrm{q})}$$

3）

$$\begin{aligned}
&10000\{rp+(1-r)(1-q)\} \\
&\qquad = 10000(0.001\times 0.98 + 0.999\times 0.08) = 809
\end{aligned}$$

よって，陽性と判断されるされる人は809人である。

3

解　説

数列（漸化式）の問題です。２つの数列 a_n，b_n の入った漸化式ですが，整数部分の係数と無理数部分の係数を分けることにより連立漸化式となっています。連立漸化式から a_n，b_n について整理することができないため，a_n と b_n をうまく組み合わせた式を作る必要があります。

組み合わせ方がわかりにくい場合には，必ず問題文で誘導がつくため，しっかり誘導に乗れるように練習しましょう。

本問では，$(a_{n+1})^2-p(b_{n+1})^2$ を考えることが，誘導となります。

２）で $a_{n+1}^2-pb_{n+1}^2$ を考えるためには，a_{n+1} を a_n と b_n で，b_{n+1} を a_n と b_n で表すことが必要となります。問題文では，この方針を示していませんが，誘導に乗るためには必要な計算となります。

２）で求めた漸化式より，$(a_n)^2-6(b_n)^2$ が定数をとる数列であることがわかるので，簡単に求まるでしょう。

解　答

１）

$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=5+2\sqrt{6}$ より，$a_1=5$，$b_1=2$ である。

又 $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^4=49+20\sqrt{6}$ より $a_2=49$，$b_2=20$ である。

２）

$$a_{n+1}+\sqrt{6}\,b_{n+1}=(\sqrt{6}+\sqrt{3})^2(a_n+\sqrt{6}\,b_n)$$
$$=5a_n+13b_n+(2a_n+5b_n)\sqrt{6}$$

より，

$a_n=5a_n+12b_n$

$b_n=2a_n+5b_n$

であるから，$a_{n+1}^2-pb_{n+1}^2$ に代入して，

$$(a_{n+1})^2-p(b_{n+1})^2=(5a_n+12b_n)^2-p(2a_n+5b_n)^2$$
$$=(25-4p)\,{a_n}^2+(120-20p)\,a_nb_n+(144-25p)\,{b_n}^2$$

a_nb_n の係数が０になることより $p=6$ である。

３）

$(a_{n+1})^2-6(b_{n+1})^2=(a_n)^2-6(b_n)^2$

より，数列 $\{(a_n)^2-6(b_n)^2\}$ は，一定の値をとる数列であることがわかる。

したがって，

$(a_{2017})^2-6(b_{2017})^2=(a_1)^2-6(b_1)^2=1$

である。

4

解　説

曲線の長さを求める問題となります。

曲線の長さは $\int_{t2}^{t1}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dx$ で求めることになります。

物理選択の方は，x 方向，y 方向の速度を合成して時間で積分すると理解できるでしょうが，なかなか覚えにくい公式です。一度しっかり向き合ってモノにしてしまいましょう。

(1)では，円の中心から接点の方向と接線の方向が直交することを用いて関係式をつくります。パラメーターで表される図形問題では必須の手法となるためよく練習しておきましょう。

(2)では，$y'(\theta)$ を求めさせるための誘導です。できればこの段階で $x'(\theta)$ も求めてしまいグラフの概形がかけるようになってください。

(3)は曲線の長さの計算です。ミスに気をつけて計算しましょう。

一般的に曲線の長さを求める積分計算は，やさしいものがほとんどです。曲線の長さに対する苦手意識をなくして完答を目指してください。

解　答

(1)　$\overset{\frown}{\mathrm{OQ}}=\theta$ で

(iii)より $\mathrm{QP}=\pi-\theta$

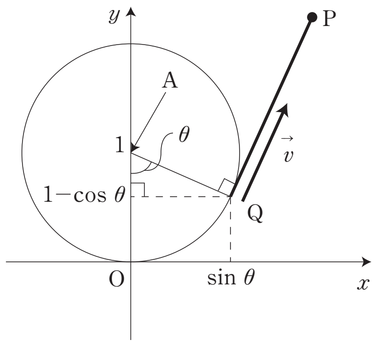
また，$\mathrm{Q}(\sin\theta,\ \cos\theta)$　とおけて，Q における円 C の接線の方向ベクトル $\vec{v}$ は

$\vec{v}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$

である。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+(\pi-\theta)\vec{v}$$
$$=(\sin\theta,\ 1-\cos\theta)+(\pi-\theta)(\cos\theta,\ \sin\theta)$$
$$x(\theta)=\sin\theta+(\pi-\theta)\cos\theta$$

$$y(\theta)=1-\cos\theta+(\pi-\theta)\sin\theta$$



(2) $y'(\theta)=\sin\theta-\sin\theta+(\pi-\theta)\cos\theta$

$\quad=(\pi-\theta)\cos\theta$

$y(\theta)$は下のように増減し，

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$で最大値$1+\dfrac{\pi}{2}$をとる。

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$y'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$y(\theta)$		↗		↘	

(3) $x'(\theta)=\cos\theta-\cos\theta-(\pi-\theta)\sin\theta$

$\quad=-(\pi-\theta)\sin\theta$

曲線の長さ$=\displaystyle\int_0^{\pi}\sqrt{(x'(\theta))^2+(y'(\theta))^2}\,d\theta$

$$=\int_0^{\pi}(\pi-\theta)\,d\theta=\left[\pi\theta-\frac{\theta^2}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2}$$

来月号では，東京慈恵会医科大学の数学を攻略しますので，ご期待ください！

全12校の掲載予定は以下のとおりとなっております。

第85回／４月号　東邦大学医学部
第86回／５月号　東京女子医科大学
第87回／６月号　金沢医科大学
第88回／７月号　岩手医科大学医学部
第89回／８・９月合併号　北里大学医学部
第90回／10月号　日本大学医学部
第91回／10月臨時増刊号　聖マリアンナ医科大学
第92回／11月号　愛知医科大学医学部
第93回／12月号　東京医科大学
第94回／１・２月合併号　昭和大学医学部
第95回／３月臨時増刊号　東京慈恵会医科大学
第96回／３月号　杏林大学医学部