東大螢雪会 医学部数学 攻略演習

マンツーマン指導で医歯薬学部に多くの合格者を輩出している「東大螢雪会」では，主要な私立大学医学部の予想問題を作成しています。このコーナーでは，「東大螢雪会」の作成した予想問題を用いて，主要な私立大学医学部の数学を攻略するための演習を行います。毎号１校分の演習を行い，全12校の連載となる予定です。

今月号では，愛知医科大学医学部の数学を攻略します！

第92回 愛知医科大学医学部 編

東大螢雪会　数学科

愛知医科大学医学部の数学は，制限時間80分で大問４題の出題がされます。第１問が答えのみを書く短答式第２問〜第４問は考え方も書く記述式で出題されるのが大きな特徴です。数学Ⅲ，確率，数列が頻出分野となっています。問題の量は多くはないですが，記述式の出題であるため解答を迅速にし，答案作成に時間をかけしっかりと記述する力が必要となります。７割程度の得点率が必要でしょう。今回の予想問題でも７割程度の得点率を目指してください。

$\boxed{1}$ 以下の１)〜３)の設問に対して，答えのみを下の解答欄に記入せよ。

１) $x^4+4=0$ を満たす複素数を全て求めよ。

２) 15^{16} と 16^{15} の大小を比較せよ。

３) $f(x)$は，微分可能な関数で，$f(-x)=f(x)+2x$，$f'(1)=1$，$f(1)=0$ を満たしている。

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+f(-x)-2}{x-1}$$

の値を求めよ。

$\boxed{2}$

X 病という病気にかかっているかどうかを診断する検査法がある。X 病に罹患している人は，p の確率で陽性と判断され，$1-p$ の確率で陰性と判断される。また，X 病に罹患していない人は，q の確率で陰性と判断され，$1-q$ の確率で陽性と判断されることがわかっている。A 病に罹患している人が確率 r で存在するとして，以下の問いに答えよ。

１) ある人が，この検査で陽性と判断され，実際に A 病に罹患している確率を求めよ。

２) この検査で陽性と判断された人が，実際に A 病に罹患している確率を求めよ。

３) $p=0.98$，$q=0.92$，$r=0.001$ であるとき，10000人の人がこの検査を受けたとき，陽性と判断される人は何人か。

$\boxed{3}$ $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2n}=a_n+\sqrt{6}\,b_n$（$n=0,1,2,\cdots$ および a_n，b_n は整数）とおくとき，次の問いに答えよ。

１) $(a_1)^2-6(b_1)^2$ を求めよ。

２) $(a_{n+1})^2-6(b_{n+1})^2$ を a_n，b_n を用いて表せ。

3） 点$(a_{2017})^2-6(b_{2017})^2$ を求めよ。

$\boxed{4}$

1） $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{x}\,dx$ の値を求めよ。

2） 2以上の自然数 n に対して，$\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}<1+\log n$ が成り立つことを証明せよ。

3） m，$n\,(m<n)$ を自然数とするとき，

$$\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k(k+a)}<\frac{1}{m}-\frac{1}{n+a}$$

が成り立つことを証明せよ。

$\boxed{1}$

解　説

1）

極形式で求める複素数を表し，ド・モアブルの法則を使って考える解法と，4次方程式を考える解法があります。

3次以上の高次方程式を解くためには，因数分解して2次以下の式にすることが基本となります。

4次方程式を解いて複素数の解を求めるためには，まず，複素数の範囲で因数分解しましょう。本問では，4次方程式を因数分解する解法を用い，ド・モアブルの法則を用いた解法を別解としています。

2）

2つの値の大小を比較するのですが，底よりも指数が大きい方が値が大きくなるということは覚えておいて損はないと思います。本問では，16^{15} のほうが大きくなりそうです。

対数の値を示していないのは，関数の増減から大小を比較してほしいという意図からです。

$\log_{10}2$，$\log_{10}3$ の値を覚えておいて計算するという方法をとることもできます。

参　考

15^{16} と 16^{15} の常用対数をとって比較してみます。

$\log_{10}15^{16}-\log_{10}16^{15}=16\log_{10}15-15\log_{10}16$

$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ を覚えておくと，

$$\begin{aligned}\log_{10}15&=\log_{10}\frac{30}{2}\\&=\log_{10}3+\log_{10}10-\log_{10}2\\&=0.4771+1-0.3010\\&=1.1761\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_{10}16&=\log_{10}2^4\\&=4\log_{10}2\\&=4\times0.3010\\&=1.2040\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}16\times1.1761-15\times1.2040&=18.8176-18.06\\&=0.7576>0\end{aligned}$$

より $15^{16}>16^{15}$ とわかります。

3）

関数の具体的な形がわからないので，単純に極限の計算を行うことができません。そこで，極限の式を微分係数の形に持っていくことになります。

微分係数の定義式 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ はしっかり覚えて使えるようにしておきましょう。

解　答

1）

因数分解すると，

$x^4+4=(x^2+2i)(x^2-2i)\,x^2=2i$ のとき $z=a+bi$ とおくと，

$a^2-b^2+2abi=2i$ より

$a^2-b^2=0$，$2ab=2a=\pm b$，$ab=1$ したがって，

$a=\pm1,\ b=\pm1$

同様に考えて，$a=\pm1,\ b=\pm1$

以上より求める複素数は，

$x=\pm(1+i),\ \pm(1-i)$ である。

別　解

$x=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とおく。

$x^4=r^4(\cos4\theta+i\sin4\theta)$ より，

$r^4=4$

$\cos4\theta+i\sin4\theta=-1+0i$

となるから，

$r=\sqrt{2}$

$4\theta=\pi+2n\pi$

$$\theta=\frac{\pi}{4}+\frac{2n}{4}\pi$$

$$=\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4}$$

したがって，

$$x=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

となる。

2）

自然対数を取り比較する。

$$\log15^{16}-\log16^{15}=15\times16\left(\frac{\log15}{15}-\frac{\log16}{16}\right)$$

であるから，$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}$$

より，$f(x)$ は $x\geqq e$ の範囲で減少するから，

$f(15)>f(16)$ が成り立つ。

したがって，$15^{16}>16^{15}$ である。

3）

$f(-x)=f(x)+2x$

$f(x)$ は微分可能な関数であるから，上の式を微分すると

$-f'(-x)=f'(x)+2$

$x=1$ を代入して，

$-f'(-1)=f'(1)+2=1+2=3$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+f(-x)-2}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)+\{f(x)+2x\}-2}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}2\cdot\frac{f(x)+x-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}2\cdot\frac{f(x)-f(1)+x-1}{x-1}$$

$$=2\left(\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}+1\right)$$

$$=2(f'(1)+1)$$

$$=4$$

2

解　説

条件付き確率の問題となります。医学においては，様々な因子の影響を受けるため，原因を特定することが難しいという特徴があります。そのため，条件付き確率により分析をしていく必要があるため，非常に重要な分野となります。本問では，検査による陽性，陰性の判断，A 病に罹患している，していないという 2 つの事象により要素がわかれています。条件付き確率では，条件とする事象を全事象として確率を求めていくので，問題を読んでも何が違うのかわかりにくいかもしれません。本問では，1）と 2）の違いをしっかり理解しているかどうかが，課題となります。条件付き確率の公式を覚えてあてはめるだけでなく，何をしているのかしっかりイメージできるようにしておくと将来の役に立ちます。

解　答

1）事象 A：ある人が X 病に罹患している。

事象 B：ある人が検査で陽性と判断される。

とおく。

条件付き確率の公式より，

$P(\mathrm{B}\cap\mathrm{A})=P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=rp$

である。

２）$P(\mathrm{B})P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})=P(\mathrm{B}\cap\mathrm{A})$

であるから，

$$P(\mathrm{B})P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})=\frac{rp}{rp+(1-r)(1-q)}$$

３）$10000\{rp+(1-r)(1-q)\}$

$=10000(0.001\times0.98+0.999\times0.08)=809$

よって，陽性と判断される人は809 人である。

$\boxed{3}$

解　説

数列（漸化式）の問題です。2 つの数列 a_n，b_n の入った漸化式ですが，整数部分の係数と無理数部分の係数を分けることにより連立漸化式となっています。連立漸化式から a_n，b_n について整理することができないため，a_n と b_n をうまく組み合わせた式を作る必要があります。

組み合わせ方がわかりにくい場合には，必ず問題文で誘導がつくため，しっかり誘導に乗れるように練習しましょう。

本問では，$(a_{n+1})^2-6(b_{n+1})^2$ を考えることが，誘導となります。

２）で $a_{n+1}^2-6b_{n+1}^2$ を考えるためには，a_{n+1} を a_n と b_n で，b_{n+1} を a_n と b_n で表すことが必要となります。問題文では，この方針を示していませんが，誘導に乗るためには必要な計算となります。

２）で求めた漸化式より，$(a_n)^2-6(b_n)^2$ が定数をとる数列であることがわかるので，簡単に求まるでしょう。

解　答

１）$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=5+2\sqrt{6}$ より，$a_1=5$，$b_1=2$ である。

$a_1^2-6b_1^2=1$ である。

２）

$$\begin{aligned}a_{n+1}+\sqrt{6}\,b_{n+1}&=(\sqrt{6}+\sqrt{3})^2(a_n+\sqrt{6}\,b_n)\\&=5a_n+13b_n+(2a_n+5b_n)\sqrt{6}\end{aligned}$$

より，

$a_n=5a_n+12b_n$

$b_n=2a_n+5b_n$

であるから，$a_{n+1}^2-6b_{n+1}^2$ に代入して，

$$\begin{aligned}(a_{n+1})^2-6(b_{n+1})^2&=(5a_n+12b_n)^2-6(2a_n+5b_n)^2\\&=(a_n)^2-6(b_n)^2\end{aligned}$$

である。

３）

$(a_{n+1})^2-6(b_{n+1})^2=(a_n)^2-6(b_n)^2$

より，数列 $\{(a_n)^2-6(b_n)^2\}$ は，一定の値をとる数列であることがわかる。

したがって，

$(a_{2017})^2-6(b_{2017})^2=(a_1)^2-6(b_1)^2=1$

である。

$\boxed{4}$

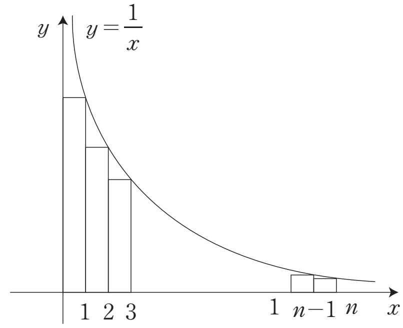
解　説

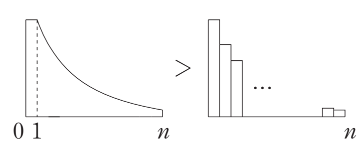
不等式の証明問題ですが，どのように考えれば良いかわかりにくいかもしれません。一般的にこのような問題では，何か問題文中にヒントがあるはずです。本問では，１）の積分計算が証明の誘導となっています。

$\displaystyle\int_1^n\frac{1}{x}\,dx$ の値を求めることから，

$\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ を $\dfrac{1}{x}$ の面積として考えることを見破りましょう。

グラフは下図のようになります。





3）の証明は，より難しい問題となっています。2）と同様に面積を考えるのですが，どんな関数の面積を考えれば良いのか見えにくくなっています。(左辺)－(右辺) を a の関数として考えると，a について単調減少となることから，$a=0$ のときに不等式が成立すれば良いことになり，$a=0$ のときを考えることで，$y=\dfrac{1}{x^2}$ のグラフの面積を考えることが見えてくることになります。

解　答

1）

$$\int_1^n \frac{1}{x}\,dx=[\log x]_1^n$$

$$=\log n$$

である。

2）

面積を考えると，

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\int_1^n \frac{1}{x}\,dx=[\log x]_1^n$$

となる。したがって，

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\log n$$

が成立する。

3）

$$f(a)=\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k(k+a)}-\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n+a}\right)$$

とおくと，a で微分して，

$$f'(a)=\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k(k+a)^2}-\frac{1}{(n+a)^2}$$

となり，$a\geqq 0$ では $f'(a)<0$ である。

したがって，$f(a)$ は $a\geqq 0$ の範囲で単調減少となる。

ここで，

$$f(0)=\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k^2}-\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)$$

である。2）と同様に $y=\dfrac{1}{x^2}$ のグラフを考えると，

$$\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k^2}<\int_m^n \frac{1}{x^2}\,dx$$

が成立する。したがって，

$$\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k^2}<\left[-\frac{1}{x}\right]_m^n=\frac{1}{m}-\frac{1}{n}$$

$f(0)<0$

ゆえに，$a>0$ のとき $f(a)<0$

以上より，題意は証明された。

来月号では，東京医科大学の数学を攻略しますので，ご期待ください！

全12校の掲載予定は以下のとおりとなっております。

第85回／4月号　東邦大学医学部
第86回／5月号　東京女子医科大学
第87回／6月号　金沢医科大学
第88回／7月号　岩手医科大学医学部
第89回／8・9月合併号　北里大学医学部
第90回／10月号　日本大学医学部
第91回／10月臨時増刊号　聖マリアンナ医科大学
第92回／11月号　愛知医科大学医学部
第93回／12月号　東京医科大学
第94回／1・2月合併号　杏林大学医学部
第95回／3月臨時増刊号　東京慈恵会医科大学
第96回／3月号　昭和大学医学部