東大螢雪会 **医 学 部 数 学** 攻略演習

マンツーマン指導で医歯薬学部に多くの合格者を輩出している「東大螢雪会」では，主要な私立大学医学部の予想問題を作成しています。このコーナーでは，「東大螢雪会」の作成した予想問題を用いて，主要な私立大学医学部の数学を攻略するための演習を行います。毎号１校分の演習を行い，全12校の連載となる予定です。

今月号では，日本大学医学部の数学を攻略します！

第90回 日本大学医学部 編

東大螢雪会　数学科

日本大学医学部の数学は，制限時間75分で５題が出題されます。第１問，第２問では小問集合，第３問～第５問は大問が出題されます。第１問～第３問はマークシート式，第４問，第５問は記述式の出題であるため，論述力も要求されます。バランスよく，標準的な問題が出題されますので，数学全体をしっかり学習することが必要になります。マークシート式の問題を８割，記述式の問題を６割以上の正解が望まれます。今回の予想問題では全体で７割程度の得点率を目指してください。

$\boxed{1}$ それぞれに１個ずつ球が入っている A，B ２つの袋がある。A，B どちらかの袋に次のルールで１個ずつ球を入れていく。

A の袋に球が m 個，B の袋に球が n 個入っている場合，次の球は A の袋に確率 $\dfrac{m}{m+n}$，B の袋に確率 $\dfrac{n}{m+n}$ で入れる。

球を２個入れた時点で，A の袋に３個，B の袋に１個の球が入っている確率は $\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$ であり，

球を３個入れた時点で，A の袋に３個，B の袋に２個の球が入っている確率は $\dfrac{\boxed{3}}{\boxed{4}}$ である。

また，球を100個入れた時点で，A の袋に51個，B の袋に49個の球が入っている確率は $\dfrac{\boxed{5}}{\boxed{678}}$

となる。

$\boxed{2}$ 正の整数 k に対して，連立不等式

$y>\dfrac{k}{x}$，$y\leqq\dfrac{x}{k}+20$，$x>0$

の表す領域を D とする。領域 D に含まれる格子点のうち，x 座標が $\dfrac{k}{2}$ であるものは，

$\boxed{1} < y \leqq \boxed{23}$ より $\boxed{45}$ 個である。また，$k=4$ のときの格子点の個数は，

$\boxed{678}$ 個である。

3 空間内に原点 O(0, 0, 0) と定点 A(1, 0, 0) および，2 つの動点 P$(0, p, 0)$，Q$(0, 0, q)$ がある。$(p>0,\ q>0)$ 点 P，Q は $\cos\angle \mathrm{PAQ}=\dfrac{1}{4}$ を満たして動く。

(1) △APQ の面積は，$\dfrac{\sqrt{\boxed{12}}}{\boxed{3}}$ である。

(2) 原点 O から，△APQ におろした垂線の足を H とする。線分 OH の長さの最大値と，そのときの p，q の値は，$p=\sqrt{\boxed{4}}$，$q=\sqrt{\boxed{5}}$，最大値 $\dfrac{\sqrt{\boxed{67}}}{\boxed{8}}$ である。

4 z を複素数とする。自然数 n を用いて，$a_n=z^n+\dfrac{1}{z^n}$ とおく。

(1) $a_1=a_2$ となる複素数 z を全て求めよ。また，このとき集合 $\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ の要素の個数を求めよ。

(2) $a_1=a_3$ となる複素数 z を全て求めよ。また，このとき集合 $\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ の要素の個数を求めよ。

(3) 集合 $\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ がちょうど 2 個の要素からなるような複素数 z を全て求めよ。

5 定積分 I_n，J_n を $I_n=\displaystyle\int_0^{\pi} x^n\cos x\,dx$，$J_n=\displaystyle\int_0^{\pi} x^n\sin x\,dx$ とする。

(1) $n\geqq 1$ のとき，I_n を J_{n-1} で表せ。

(2) $n\geqq 1$ のとき，J_n を I_{n-1} で表せ。

(3) 定積分 $I=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)\cos x\,dx$ の値を求めよ。

1

解　説

球を入れる時点での，A の袋，B の袋の球の個数によって確率が変化するので，丁寧に状況を確認しましょう。初めの 2 つの確率を求めることで，球の入れ方のルールがわかってくるでしょう。確率，整数問題，数列等では，具体的な場合を考え題意を把握することが重要です。

解　答

1 回目に A，2 回目に A に球を入れればよいから，

$$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

である。

A, A, B　A, B, A　B, A, A という順番に球を入れればよいので，

$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{4}$

である。

同様に考えると，求める確率は $\frac{1}{51+49+1}=\frac{1}{101}$

である。

2

解　説

格子点は条件から，しっかりと絞り込むことが必要です。それぞれの場合について絞り込んでいきましょう。

解　答

$\frac{k}{2}$ のとき，領域 D に含まれる y 座標の範囲は，

$2<y\leqq-\frac{1}{2}+20$ であるから，$2<y\leqq 19$

したがって，求める格子点の個数は，17個である。
$k=4$ のとき連立不等式は，

$y>\frac{4}{x}$，$y\leqq\frac{x}{4}+20$，$x>0$

である。$x=1$，2，3，4 のときを考えると，y 座標の範囲は，

$4<y\leqq 19$，$2<y\leqq 19$，$1<y\leqq 19$，$1<y\leqq 19$ となるから，格子点の個数は15個，17個，18個，18個となる。したがって，周期性より

$(15+17+18+18)+\frac{(1+18)\,18}{2}=239$ 個となる。

3

解　説

空間図形の問題であり，ベクトルを使って考えていくことになります。平面におろした垂線の足を考える問題は頻出テーマなので，十分に習熟しておきましょう。本問では，O から平面 APQ におろした垂線の足の座標を求めることから考えることもできますが，三角錐 OAPQ の体積の最大値を考えることから垂線の最大値を求めることもできます。解答では，体積から考えています。

O から平面 APQ におろした垂線の足の座標を考えるためには平面 APQ の法線ベクトルを求められると簡単に計算することができます。

本問では，法線ベクトルを $(a,\ b,\ c)$ とおくと，内積 $(a, b, c)\cdot(-1, p, 0)=0$，$(a, b, c)\cdot(-1, 0, q)=0$ を考え，連立方程式 $-a+bp=0$，$-a+cq=0$ を解いて，$(pq,\ q,\ p)$ が法線ベクトルの一つとなります。

平面 APQ の式は，

$pq\,(x-1)+q\,(y-0)+p\,(z-0)=0$ となり，点と平面の距離より

$\mathrm{OH}=\frac{|\mathrm{pq}|}{\sqrt{(\mathrm{pq})^2+\mathrm{q}^2+\mathrm{p}^2}}$ となります。

この式の最大値を求める際には，

$$\frac{pq}{\sqrt{(pq)^2+q^2+p^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{(pq)^2+q^2+p^2}{(pq)^2}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{q}{p}\right)^2+\left(\frac{p}{q}\right)^2}}$$

として，分母に対して相加相乗平均を用いることになるでしょう。誘導式の穴埋め問題でないため，いろいろな方法で考える練習をしておかないと，最適な解法が思いつかない問題となっております。

解　答

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|\cos\theta$

$(-1,\ p,\ 0)\cdot(-1,\ 0,\ q)=\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|\frac{1}{4}$

$4=\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|$

ここで，$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$=\frac{\sqrt{15}}{4}$ 三角形 APQ の面積 S は

$\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|\sin\theta=2\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{\sqrt{15}}{2}$ である。

(2)　APQ の面積が一定であるので，垂線の長さが最大になるのは，四面体 OAPQ の体積が最大になるときである。

四面体 OAPQ において三角形 OPQ と OA は垂直の関係になっており，OA＝1 で一定であるか

ら，四面体 OAPQ の体積が最大となるのは，三角形 OPQ の面積が最大になるときである。三角形 OPQ の面積は，$\dfrac{1}{2}pq$ となる。

p，q の条件は，$4=\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|$ より

$(1+p^2)(1+q^2)=16$

である。

以上より，$p>0$，$q>0$ かつ $(1+p^2)(1+q^2)=16$ を満たすとき，pq を最大とする p，q を求めれば良い。

$(1+p^2)(1+q^2)$ はベクトル $\vec{u}=(1,\,p)$，$\vec{v}=(1,\,q)$ を考えると，$\left|\vec{u}\right|^2\left|\vec{v}\right|^2=(1+p^2)(1+q^2)$ である。

ここで，内積を考えると，

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\cos\theta\leqq\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|$

となる。この関係式を成分で表すと，

$(1,\,p)\cdot(1,\,q)\leqq\sqrt{1+p^2}\sqrt{1+q^2}=4$

$1+pq\leqq 4$

$pq\leqq 3$

となる。

内積が最大値を取るのは，ベクトル $\vec{u}=(1,\,p)$，$\vec{v}=(1,\,q)$ が同じ向きで平行になるときであるから，$p=q$ のときである。

ゆえに，$pq=3$ より，

$p=q=\sqrt{3}$ のとき pq は最大となる。また，このとき三角形 OPQ の面積は $\dfrac{1}{2}pq=\dfrac{3}{2}$ となるから，

四面体 OAPQ の体積 V は $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{2}\times 1=\dfrac{1}{2}$ である。

したがって，線分 OH の長さの最大値は

$\dfrac{3V}{S}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ である。

4

解　説

複素数を使った集合の問題です。複素数の計算にはしっかり練習して習熟しましょう。複素数の計算をする際は，

z や w の形のまま計算する。

$z=x+yi$ 等と成分をおいて計算する。

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ と極形式で計算する。

という 3 種類の方法があります。

できるだけ，z や w の形のまま，または極形式で計算するようにしましょう。

本問の(1)，(2)では，条件をそのまま使って計算すると，複素数 z の方程式ができるので，その方程式を解くことで，複素数 z を求めることができます。

自然数 n を用いて計算する際には，極形式を利用して計算することで，全ての複素数 z を求めることができます。

(3)では，(1)，(2)の結果から条件を考えることになります。

必要条件で絞り込み十分性を持っているかどうか確認することが必要です。答えは(1)で出ていますが，しっかりとした説明ができるかどうかが課題です。

解　答

(1)

$a_1=a_2$ より

$z+\dfrac{1}{z}=z^2+\dfrac{1}{z^2}$

$z^2-z+\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{1}{z}=0$

$z(z-1)+\dfrac{1-z}{z^2}=0$

$\dfrac{1-z}{z^2}(1-z^3)=0$

$1-z=0$，$1-z^3=0$

z は複素数あるから，

$z=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$ である。

極形式で表すと，

$z=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$，$\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}$ である。

$z=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$ のとき，

$\dfrac{1}{z}=\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}$ であり，

$z=\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}$ のとき，

$\dfrac{1}{z}=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$ である。

したがって,

$a_n=\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)^n+\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)^n$

であり,

n が 3 の倍数のとき, $a_n=1+1=2$

3 の倍数以外のとき, $a_n=-1$

となる。したがって,集合 $\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ の要素は 2 個である。

(2)

$a_1=a_3$ より

$z+\dfrac{1}{z}=z^3+\dfrac{1}{z^3}$

$z^3-z+\dfrac{1}{z^3}-\dfrac{1}{z}=0$

$z(z^2-1)+\dfrac{1-z^2}{z^3}=0$

$\dfrac{(1-z^2)(1-z^4)}{z^3}=0$

$1-z^2=0,\ 1-z^4=0$

z は複素数であるから,

$z=\pm i$ である。

極形式で表すと,

$z=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2},\ \cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}$ である。

$z=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$ のとき,

$\dfrac{1}{z}=\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}$ であり,

$z=\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}$ のとき,

$\dfrac{1}{z}=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$ である。

したがって,

$a_n=\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)^n+\left(\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)^n$

であり,

n が奇数のとき, $a_n=0$

$n=4k$ のとき, $a_n=2$

$n=4k-2$ のとき, $a_n=-2$ となる。したがって,集合 $\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ の要素は 3 個である。

(3)

集合 $\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ がちょうど 2 個の要素からなることから, a_1, a_2, a_3 のうち少なくとも 2 つは等しいことが必要である。

つまり, $a_1=a_2$ または $a_2=a_3$ または $a_1=a_3$ が必要である。

ここで,

$a_1=a_2$ のときは(1)より要素の個数が 2 個となり適している。

$a_1=a_3$ のときは(2)より要素の個数が 3 個となり不適である。

$a_1=a_3$ のときは,

$z^2+\dfrac{1}{z^2}=z^3+\dfrac{1}{z^3}$

$z^3-z^2+\dfrac{1}{z^3}-\dfrac{1}{z^2}=0$

$z^2(z-1)+\dfrac{1-z}{z^3}=0$

$\dfrac{1-z}{z^3}(1-z^5)=0$

$1-z=0,\ 1-z^5=0$

z は複素数であるから, $1-z^5=0$ を満たす複素数を考えればよい。$1-z^5=0$ を満たす複素数は,極形式で

$z=\cos\dfrac{2\pi}{5}m+i\sin\dfrac{2\pi}{5}m,\quad m=1, 2, 3, 4$

と表すことができる。

このとき, $z_1=z_4$, $z_2=z_4$, z_5 と異なる 3 個の要素があるから,不適である。

以上より,集合 $\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ がちょうど 2 個の要素からなるのは, $a_1=a_2$ のときであり,条件を満たす複素数は $z=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$ である。

$\boxed{5}$

$\boxed{解　説}$

典型的な積分の問題です。部分積分をすることでn−1 番目と n 番目の関係式が出ることは容易にわかるでしょう。

(1), (2)は確実に計算ミスをしないで確実に取れ

るようにしましょう。

⑶は奇関数の定積分は0になることを利用しないと計算量が多くなり大変です。

cos が偶関数であることより，x，x^3，x^5 をかけた項は奇関数となり，計算する必要は無くなります。結局，I_0，I_2，I_4 を計算すれば良いことになり，⑴，⑵を繰り返し使うことで，I_0 と J_1 の計算だけですむことになります。

解　答

⑴

$$I_n=\int_0^{\pi} x^n(\sin x)'\,dx$$

$$=[x^n\sin x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} nx^{n-1}\sin xdx$$

$$=-n\int_0^{\pi} x^{n-1}\sin xdx$$

$$=-nJ_{n-1}$$

⑵

$$J_n=\int_0^{\pi} x^n(-\cos x)'\,dx$$

$$=[x^n(-\cos x)]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} nx^{n-1}(-\cos x)\,dx$$

$$=-\pi^n+n\int_0^{\pi} x^{n-1}\cos xdx$$

$$=--\pi^n+nI_{n-1}$$

⑶

奇関数と偶関数に注意すると，

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)\cos xdx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}(1+x^2+x^4)\cos xdx=I_0+I_2+I_4$$

となる。ここで，

$$I_0=\int_0^{\pi}(\sin x)'\,dx=[x^n\sin x]_0^{\pi}=0$$

である。⑴，⑵を利用すると，

$I_2=-2J_1=(-2\pi+I_0)=-2\pi$

$I_4=-4J_3=-2(\pi^3+3I_2)=-4\pi^3+24\pi$

以上より，$I=-8\pi^3+44\pi$

来月号では，聖マリアンナ医科大学の数学を攻略しますので，ご期待ください！

全12校の掲載予定は以下のとおりとなっております。

第85回／４月号　東邦大学医学部
第86回／５月号　東京女子医科大学
第87回／６月号　金沢医科大学
第88回／７月号　岩手医科大学医学部
第89回／８・９月合併号　北里大学医学部
第90回／10月号　日本大学医学部
第91回／10月臨時増刊号　聖マリアンナ医科大学
第92回／11月号　愛知医科大学医学部
第93回／12月号　東京医科大学
第94回／１・２月合併号　杏林大学医学部
第95回／３月増刊号　東京慈恵会医科大学
第96回／３月号　昭和大学医学部

「東大螢雪会」では，本誌をご覧の方々の学力アップのために，主要な私立大学医学部の予想問題を無料でプレゼントしています。ご希望の方は，「東大螢雪会」のホームページ（http://www.keisetsukai.com）（PC・携帯）からお問い合わせください。