東大螢雪会 **医** **学** **部** **数** **学** 攻略演習

マンツーマン指導で医歯薬学部に多くの合格者を輩出している「東大螢雪会」では，主要な私立大学医学部の予想問題を作成しています。このコーナーでは，「東大螢雪会」の作成した予想問題を用いて，主要な私立大学医学部の数学を攻略するための演習を行います。毎号１校分の演習を行い，全12校の連載となる予定です。

今月号では，岩手医科大学の数学を攻略します！

第88回　岩手医科大学　編

東大螢雪会　数学科

岩手医科大学の数学は，制限時間60分で３題が出題されます。第１問では小問集合，第２問，第３問は大問が出題されます。大問では場合の数，確率，数学３からの出題となっています。制限時間に比して解答数が多いため、解くべき問題をしっかり見極める力も要求されます。合格には７割以上の正解が望まれます。今回の予想問題では７割程度の得点率を目指してください。

$\boxed{1}$

⑴　O を原点とする xyz 空間に３点 $\mathrm{A}(1,0,0)$，$\mathrm{T}(0,t,0)$，$\mathrm{B}(0,0,1)$ がある。直線 AT 上の点 P を，

内積 $\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AT}}=-\dfrac{1}{2}$ をみたすようにとる。

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\,\overrightarrow{\mathrm{OT}}+(1-s)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と表すとき，s と t には $2st^2+s-=0$ の関係がある。

P の座標を $(X, Y, 0)$ として，X，Y を t を用いて表すと，

$$X=\frac{\boxed{\text{ア}}+\boxed{\text{イ}}\,t^2}{\boxed{\text{ウ}}+\boxed{\text{エ}}\,t^2},\quad Y=\frac{\boxed{\text{オ}}\,t}{\boxed{\text{カ}}+\boxed{\text{キ}}\,t^2}$$ となる。

t がすべての実数を動くとき，X は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\leqq X<\boxed{\text{コ}}$ の範囲を動く。

点 P の描く図形は点 $\left(\boxed{\text{サ}},\ \boxed{\text{シ}}\right)$ を除いた半径 $\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$，中心 $\left(\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}},\ \boxed{\text{チ}}\right)$ の円となる。

⑵　数列 1，2，3，3，4，5，4，5，6，7，5，6，7，8，9，……

がある。この数列を k 群目に k 個の数が入るように分けて考える。

はじめて99が現れるのは第 $\boxed{\text{ツ}}$ 項である。

第2017項は $\boxed{\text{テ}}$ である。この数列で1000回現れる数は $\boxed{\text{ト}}$ と $\boxed{\text{ナ}}$ である。

$\boxed{2}$ 3つの袋 A, B, C がある。A には白色の球が 1 個，B と C にはそれぞれ，赤色，青色，黄色の球が各 1 個ずつ，合計 3 個入っている。

操作 1 ：B から 1 個の球を取り出し，A に入れる。

操作 2 ：C から 1 個の球を取り出し，B に入れる。

操作 3 ：A から 1 個の球を取り出し，C に入れる。

とする。

操作 1 → 2 → 3 → 1 を行ったときの確率を考える。

(1) A に同じ色の球が 2 個入っている確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

(2) B に同じ色の球が 2 個入っている確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

$\boxed{3}$ t を実数として，複素数 α を $\alpha=-1+ti$ とする。複素数平面において， 1 ，α，α^2，α^3 が表す点をそれぞれ A, B, C, D とし，線分 CD の中点を M とする。

(1) $t\neq 0$ のとき，$\angle$BAC の大きさは $\boxed{\text{ア}}$ ° となる。

(2) 線分 BM の長さが線分 AB の長さ以下になるような実数 t の範囲は

$-\boxed{\text{イ}}\leqq t\leqq\boxed{\text{ウ}}$ となる。

(3) 実数 t が(2)で求めた範囲をうごくとき，点 D が描く曲線の長さは $\boxed{\text{エ}}$ である。

$\boxed{1}$

(1)

解　説

ベクトルの基本問題です。空間では 3 つのベクトルを用いることですべてのベクトルを表すことができます。

本問では A, B, T の座標が与えられているので，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ ベクトルを用いて表すことになります。

3 つのベクトルの大きさ，内積については座標を用いて計算することができるので，求めるべきベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ を用いて表すことをしっかり行いましょう。

点 P の軌跡を求めるために，X，Y の 2 式からパラメーター t を消去することになります。ただ，本問では，X，Y どちらかの式を t について解いて他方に代入ということが難しいので，式の形をうまく使って消すことになります。本問で用いた方法の他に $\dfrac{X}{Y}$ を計算して t を求めるという方法もあります。しっかり練習しておきましょう。

解　答

$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$=s\,\overrightarrow{\mathrm{OT}}+(1-s)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AT}}=\overrightarrow{\mathrm{OT}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

を $\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AT}}=-\dfrac{1}{2}$ に代入して

$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AT}}=\left\{s\,\overrightarrow{\mathrm{OT}}+(1-s)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right\}\left\{\overrightarrow{\mathrm{OT}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right\}$

$=st^2-(1-s)$

$=-\dfrac{1}{2}$

となるから，

$st^2-(1-s)=-\dfrac{1}{2}$

$2st^2+2s-1=0$
となる。
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\,\overrightarrow{\mathrm{OT}}+(1-s)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}$
$=(1-s,\ st,\ 0)$
より，$X=1-s$，$Y=st$
$2st^2+2s-1=0$ を用いて s を消去すると
$X=\dfrac{1+2t^2}{2+2t^2}$，$Y=\dfrac{t}{2+2t^2}$ となる。

$$X=\frac{1+2t^2}{2+2t^2}$$
$$=\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{1+t^2}\right)$$
と変形することができる。
ここで，$1+t^2\geqq 1$ より $1\geqq\dfrac{1}{1+t^2}>0$ となるから
$$1\leqq 2-\frac{1}{1+t^2}<2$$
したがって，
$$\frac{1}{2}\leqq X<1$$
となる。
X，Y の2式より t を消去する。
$$2X=2-\frac{1}{1+t^2}$$
$$2(1-X)=\frac{1}{1+t^2}$$
$$2Y=\frac{t}{1+t^2}$$
より，2式を2乗してたすと
$$4(1-X)^2+4Y^2=\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2+\left(\frac{t}{1+t^2}\right)^2$$
$$4X^2-8X+4Y^2+4=\frac{1+t^2}{(1+t^2)^2}=2-2X$$
$$2X^2-4X+2Y^2+2=1-X$$
$$\left(X-\frac{3}{4}\right)^2+Y^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2$$
したがって，点Pは点$(1,0)$を除いた中心$\left(\dfrac{3}{4},0\right)$，半径$\dfrac{1}{4}$の円を描く。

(2)

解　説

いわゆる群数列の問題です。
群数列では，群の初項，群の末項，群に含まれる項の数をしっかり確認して理解することが必要です。
本問では第 k 群は $\{k,\ k+1,\ \cdots,\ 2k-1\}$ からなること，末項は必ず奇数となることに注目しましょう。
また，奇数は群の末項，偶数は末項のひとつ前の項として初めて出現し，群の初項となった群で最後の出現となります。
1000回現れる数は奇数の場合，偶数の場合で分けて考える必要があるので，気を付けましょう。

解　答

第 k 群は $\{k,\ k+1,\ \cdots,\ 2k-1\}$ となるので，最初の99は
$$2k-1=99$$
$$2k=100$$
すなわち，$k=50$ より，第50群の最後の数として現れる。
また，第 k 群には，k 個の数が含まれるので，
$$\sum_{k=1}^{50}k=\frac{1}{2}\times 50\times 51=1275$$
最初の99は第1275項である。
第2017項が第 m 群に属するとすると
$$\sum_{k=1}^{m-1}k<2017\leqq\sum_{k=1}^{m}k$$
$$(m-1)m<4034\leqq m(m+1)$$
を満たせばよい。
ここで，$63\times 64=4032$，$64\times 65=4160$ より
$m=64$
また，$4034-4032=2$ であるから，
第2017項は第64群の2番目の数である。
したがって，65である。

一つの数は各群に1回ずつ現れるから，
初めて現れる群を第 l 群，最後に現れる群を第 m 群とすると，
求める数は m であり，$m-l+1=1000$ となればよい。

各群の最後の数は奇数となるので，求める数が奇数のときは
第 l 群の最後の数が求める数 m となるから
$m=2l-1$ であり，

$$m-\frac{m+1}{2}+1=1000$$

$$m+1=2000$$

$$m=1999$$

である。
また，求める数が偶数のときは，
第 l 群の最後より一つ前の数が求める数 m となるから
$m=2l-2$ であり，

$$m-\frac{m+2}{2}+1=1000$$

$$m=2000$$

である。

2

解　説

操作が多いため操作ごとに球がどう動くかわかりにくい問題です。しっかり把握するために図示して考えましょう。(1)，(2)ともに題意の事象が起こるための球の動きを見つけましょう。
１パターンを書き出して，他に何パターンあるかを考えるとよいでしょう。
解答では(1)，(2)ともに操作後の球の動きを書き出して，該当するパターンの一つをしっかり確認していくことを行いました。樹形図を書く等いろいろな書き方がありますので，一番書きやすい方法を身につけてください。今回は表を書いて動きを表しました。

解　答

(1)
Ａの袋に赤球が２個となるための各操作後の球の変化は

	A（白）	B（赤，青，黄）	C（赤，青，黄）
操作１後	A（白，赤）	B（青，黄）	C（赤，青，黄）
操作２後	A（白，赤）	B（青，黄，赤）	C（青，黄）
操作３後	A（赤）	B（赤，青，黄）	C（白，青，黄）
操作１後	A（赤，赤）	B（青，黄）	C（白，青，黄）

となればよい。
その確率は

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{54}$$

であり，青が２つ，黄が２つの場合もあるから，
求める確率は

$$3\times\frac{1}{54}=\frac{1}{18}$$

である。

(2)
Ｂの袋に赤球が２個となるための各操作後の球の変化の一つは

	A（白）	B（赤，青，黄）	C（赤，青，黄）
操作１後	A（白，青）	B（赤，黄）	C（赤，青，黄）
操作２後	A（白，青）	B（赤，赤，黄）	C（青，黄）
操作３後	A（青）	B（赤，赤）	C（白，青，黄）
操作１後	A（青，黄）	B（赤，赤）	C（白，青，黄）

である。
その確率は

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{54}$$

である。操作１は２通り，操作３でも２通りあり，

Ｂの袋に青球が２個，黄球が２個ある場合があるので，求める確率は

$$3\times4\times\frac{1}{54}=\frac{2}{9}$$

である。

3

解　説

複素数平面上で複素数のなす角を考えるときは，割り算を行いましょう。実数であれば，0° または，180°，純虚数の場合は90° または，270° となります。
それ以外の場合は，割り算で得られた複素数を極形式で表すことで角度を求めることになります。
本問では，純虚数となるのでなす角は90° となります。
曲線について考察する際には $z=x+yi$ とおいて，成分について考えていくとよいでしょう。本問で

は，曲線の概形についての考察ではなく，長さを求めるため，パラメーターで微分して計算することになります。

曲線の長さを求めるための公式

$$\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

はしっかり覚えておきましょう。

解　答

$\alpha-1=-2+ti\neq0$ だから $\dfrac{a^2-1}{a-1}=a+1=ti$　　$t\neq0$

だから，ti は純虚数。よって，$\angle \mathrm{BAC}=90^\circ$ である。

⑵　$\mathrm{BM}\leqq\mathrm{AB}$ より

$|\alpha^2+\alpha^3-2\alpha|\leqq2|\alpha-1|$

$\alpha-1\neq0$ より

$|\alpha||\alpha+2|\leqq2$

$\sqrt{t^2+1}\sqrt{t^2+1}\leqq2$

$t^2+1\leqq2$

$t^2\leqq1$

$-1\leqq t\leqq1$

⑶　$z=x+yi$ とおくと，

$\alpha^3=(-1+ti)^3$

$=(ti)^3-3(ti)^2+3(ti)-1$

$=3t^2-1+(-t^3+3t)i$

よって，$x=3t^2-1$，$y=-t^3+3t$

両辺を t で微分して

$\dfrac{dx}{dt}=6t$，$\dfrac{dy}{dt}=-3t^2+3$

曲線の長さ L は

$$L=\int_{-1}^{1}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

で求めることができる。

$$L=\int_{-1}^{1}\sqrt{(6t)^2+\{3(t^2-1)\}^2}\,dx$$

$$=2\int_0^1\sqrt{9(t^2+1)^2}\,dx$$

$$=2\int_0^1 3(t^2+1)\,dx$$

$$=2\left[t^3+3t\right]_0^1=8$$

来月号では，北里大学医学部の数学を攻略しますので，ご期待ください！

全12校の掲載予定は以下のとおりとなっております。

第85回／４月号　東邦大学医学部
第86回／５月号　東京女子医科大学
第87回／６月号　金沢医科大学
第88回／７月号　岩手医科大学
第89回／８月号　北里大学医学部
第90回／９・10月合併号　日本大学医学部
第91回／10月臨時増刊号　聖マリアンナ医科大学
第92回／11月号　愛知医科大学医学部
第93回／12月号　東京医科大学
第94回／１・２月合併号　杏林大学医学部
第95回／３月増刊号　東京慈恵会大学
第96回／３月号　昭和大学医学部