東大螢雪会 **医学部数学** 攻略演習

マンツーマン指導で医歯薬学部に多くの合格者を輩出している「東大螢雪会」では，主要な私立大学医学部の予想問題を作成しています。このコーナーでは，「東大螢雪会」の作成した予想問題を用いて，主要な私立大学医学部の数学を攻略するための演習を行います。毎号１校分の演習を行い，全12校の連載となる予定です。

今月号では，昭和大学医学部の数学を攻略します！

第84回 昭和大学医学部 編

東大螢雪会講師　小池　淳

昭和大学医学部の数学は，1と3が小問集合，24が大問という構成です。制限時間は英語と数学で140分であり数学は70分以内に解く必要があります。小問は答えのみ，大問も記述量は多くないので，答案作成に時間がかかることはないでしょう。難問はないものの計算量が多く手早く解かないと時間切れになってしまい，差がつくよい問題が出題されています。出題分野の偏りもないためまんべんなく学習する必要があります。今回の予想問題では，７割程度の得点率を目指して下さい。

1

(1)　整式 $(x^2+2x+3)^n$ を整式 x^3-x^2-x+1 で割った余りを求めなさい。

(2)　公差が正の等差数列 $\{a_n\}$ があり，a_1, a_2, a_3 が直角三角形の３辺の長さとなっている。

(2-1)　$\dfrac{a_2}{a_1}$ の値を求めなさい。

(2-2)　$\dfrac{a_n}{a_1}$ の値を求めなさい。

2

円周上に中心角が $\dfrac{2\pi}{3}$ となるように３点 A，B，C をとる。動点 P は，３点 A，B，C を動く。さいころを一つ投げて出た目を m とする。動点 P は点 A を始点としてさいころを１回投げるごとに $\dfrac{2m^2\pi}{3}$ 反時計回りに回転する。n 回さいころを投げた後に動点 P が点 A，B，C にいる確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n とする。

(1)　a_2, b_2, c_2 を求めなさい。

(2-1)　a_{n+1} を a_n，b_n を用いて表しなさい。

(2-2)　b_{n+1} を a_n，b_n を用いて表しなさい。

(3)　a_{n+2} を a_n を用いて表しなさい。

(4)　a_n を n を用いて表しなさい。

$\boxed{3}$

(1) O を原点とする座標平面に楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ がある。この楕円の $y>0$ の部分を C とする。x 軸上に点 $P_n(a_n, 0)$ をとり，P_n を通り x 軸に垂直な直線と曲線 C の交点を Q_n とする。点 Q_n における曲線 C の法線を l とし，l と x 軸の交点を P_{n+1} とする。$P_1(1, 0)$ とする。

(1-1)　法線 l の方程式を求めなさい。

(1-2)　a_n の一般項を求めなさい。

(1-3)　線分 P_nP_{n+1} の長さを b_n をする。b_n の一般項を求めなさい。

(1-4)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} {b_n}^2$ の値を求めなさい。

(2)　複素数 z が $z\bar{z}-(1-\sqrt{3}\,i)z-(1+\sqrt{3}\,i)\bar{z}=0$ を満たしている。

(2-1)　z が描く円の中心を求めなさい。

(2-2)　z が描く円の半径を求めなさい。

$\boxed{4}$

O を原点とする座標平面の第 1 象限に曲線 $C: x^3+x^2y+3xy-y^2=0$ がある。

(1)　$x=\dfrac{3t-t^2}{t+1}$ とおくとき y を t を用いて表しなさい。

(2)　t が $0 \leqq t \leqq 3$ の範囲を動くとき y の値域を求めなさい。

(3)　曲線 C によって囲まれる図形の面積を求めなさい。

$\boxed{1}$

解　説

(1)　因数分解すると $x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1)$ となります。余りを求める場合は因数定理を用いて考えますが，$x^3-x^2-x+1=0$ となる 3 つの異なる数がないため，式が足りなくなります。こういった場合は，①微分を用いる，②商のおき方を工夫するの 2 通りの考え方がありますが，簡単なのは①です。しっかり使いこなせるように練習しましょう。

(2)　公差が正の等差数列であることより $a_1<a_2<a_3$ となることがわかります。これより三角形の最大辺がわかるので，三平方の定理の式を律指揮できるようになります。後は，因数分解すればよいでしょう。(2-2) では，公差を求めるのではなく $\dfrac{a_2}{a_1}$ をうまく使うと簡単に計算することができます。

解　答

(1)　因数分解すると $x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1)$ である。

整式 $(x^2+2x+3)^n$ を整式 x^3-x^2-x+1 で割った余りを $Q(x)$ 余りを ax^2+bx+c とおくと，

$(x^2+2x+3)^n$

$\quad=(x-1)^2(x+1)\,Q(x)+ax^2+bx+c$ …①

となる。ここに $x=1, -1$ を代入すると，

$6^n=a+b+c$ …②

$2^n=a-b+c$ …③

また，①式の両辺を x で微分すると

$n(2x+2)(x^2+2x+3)^{n-1}$

$\quad=\{2(x-1)(x+1)\,Q(x)+(x-1)^2$

$\qquad Q(x)+(x-1)^2(x+1)\,Q'(x)\}+2ax+b$

ここに $x=1$ を代入すると

$4n6^{n-1}=2a+b$ …④

②，③，④より

$a=2n\cdot6^{n-1}-9\cdot6^{n-2}-2^{n-2}$

$b=3\cdot6^{n-1}-2^{n-1}$

$c=-2n\cdot6^{n-1}+27\cdot6^{n-2}+3\cdot2^{n-2}$

(2-1)　公差が正の等差数列であるので $0<a_1<a_2<a_3$。したがって，直角の対辺は a_3 である。

$a_3{}^2=a_1{}^2+a_2{}^2$

ここで，等差数列であるから $2a_2=a_1+a_3$ が成り立つ，上の式に代入して

$(2a_2-a_1)^2=a_1{}^2+a_2{}^2$

$4a_2{}^2-4a_1a_2+a_1{}^2=a_1{}^2+a_2{}^2$

$3a_2{}^2=4a_1a_2$

$0<a_1<a_2$ であるから a_1a_2 で両辺を割って

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{4}{3}$$

となる。

(2-2)

公差は $d=a_2-a_1$ であるから一般項は

$a_n=a_1+(n-1)(a_2-a_1)$

a_1 で両辺を割って

$$\frac{a_n}{a_1}=1+(n-1)\left(\frac{a_2}{a_1}-1\right)$$

$$=1+(n-1)\left(\frac{4}{3}-1\right)$$

$$=1+(n-1)\frac{1}{3}$$

$$=\frac{n+2}{3}$$

となる。

$\boxed{2}$

解　説

さいころの目によって回転する角度が異なりますが，2π 回転すると元に戻るため回転の種類は $\frac{2\pi}{3}$，$\frac{4\pi}{3}$，2π の 3 種類のみとなります。ところが，出た目の 2 乗により回転角が決まるため回転角は $\frac{2\pi}{3}$，2π の 2 種類だけとなってしまい，問題文を読んで感じるよりもやさしい問題となっています。問題文を読んで大変そうな問題と思うよりも，実際に手を動かして問題の意図を把握することが大切であることが分かる問題となっています。その際には動点 P の動きをフローチャートでまとめるとよいでしょう。

解　答

さいころを 1 回振って出た目と回転角の関係は

m	1	2	3	4	5	6
m^2	1	4	9	16	25	36
回転角	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	2π	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	2π

回転角	$\frac{2\pi}{3}$	2π
確率	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

となる。

したがって，$a_1=\frac{1}{3}$, $b_1=\frac{2}{3}$, $c_1=0$ である。

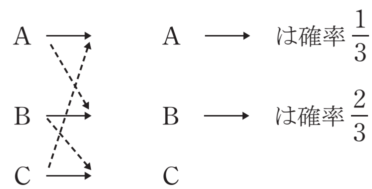
また，$a_2=a_1\times\frac{1}{3}+c_1\times\frac{2}{3}=\frac{1}{9}$

$b_2=a_1\times\frac{2}{3}+b_1\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$

である。

(2-1)　n 回後と $n+1$ 回後の動点 P の位置を考えると

n 回後　　$n+1$ 回後



したがって，$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3}c_n$

ここで　$a_n+b_n+c_n=1$ を用いると

$$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3}(1-a_n-b_n)=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}a_n-\frac{2}{3}b_n \cdots①$$

となる。

(2-2)　(2-1) と同様に考えると

$b_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}b_n$ である。

(3)　a_{n+2} を a_n を用いて表しなさい。

$$a_{n+2}=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}a_{n+1}-\frac{2}{3}b_{n+1}$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}a_{n+1}-\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}b_n\right)$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}a_{n+1}-\frac{4}{9}a_n-\frac{2}{9}b_n$$

ここで①式より

$$\frac{2}{3}b_n=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}a_n-a_{n+1}$$

となるので，

$$a_{n+2}=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}a_{n+1}-\frac{4}{9}a_n-\frac{2}{9}b_n$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}a_{n+1}-\frac{4}{9}a_n-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}a_n-a_{n-1}\right)$$

$=-\frac{1}{3}a_n+\frac{4}{9}$ となる。

(4)

$$a_{n+2}=-\frac{1}{3}a_n+\frac{4}{9}$$

$$\left(a_{n+2}-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}\left(a_n-\frac{1}{3}\right)$$

と変形できるから奇数項と偶数項に分けて考えると

奇数項は初項が $a_1=\frac{1}{3}$ であるから

$$\left(a_n-\frac{1}{3}\right)=\left(-\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)=0$$

$$a_n=\frac{1}{3}$$

偶数項は初項が $a_2=\frac{1}{9}$ であるから

$$\left(a_n-\frac{1}{3}\right)=\left(-\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{3}\right)=-\frac{2}{9}\left(-\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}-1}$$

$a_n=\frac{1}{3}-\frac{2}{9}\left(-\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}-1}$ となる。

$\boxed{3}$

解　説

(1)　微分して法線の傾きを求めることになりますが，当然陰関数のまま微分しましょう。y について解いてから微分すると時間のロスと計算ミスの原因になります。

(1-2) では Q_n で接線を求めることになります。それほど繁雑な計算にはならないので正確に計算しましょう。l_n と x 軸の交点 P_{n+1} を計算することで a_n の漸化式が得られます。等比数列の漸化式となるので一般項は簡単に求められるはずです。b_n, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n{}^2$ についても簡単に計算できるはずです。しっかり計算を行いましょう。

(2)　複素数平面ではなるべく成分計算をしないで問題を解けるようにしましょう。本問では，因数分解をおこなうことになります。$|z-w|=r$ の形に変形できれば円の中心と半径がわかることになります。

複素数では

$|z-w|^2=(z-w)(\overline{z-w})=(z-w)(\bar{z}-\bar{w})$ は必須事項です。

解　答

(1)　微分すると

$$\frac{x}{2}+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$x=1$ より点 $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ での接線の傾きは

$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{4y}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$。したがって，法線の傾きは $2\sqrt{3}$ であるので，法線の方程式は

$$y=2\sqrt{3}(x-1)+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$=2\sqrt{3}x-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ である。

(1-2)　点 $\left(a_n, \frac{\sqrt{4-a_n{}^2}}{2}\right)$ での法線の方程式は

(1-1) と同様に考えて

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{4y}=-\frac{a_n}{4\frac{\sqrt{4-a_n{}^2}}{2}}=-\frac{a_n}{2\sqrt{4-a_n{}^2}}$$

$$y=\frac{2\sqrt{4-a_n{}^2}}{a_n}(x-a_n)+\frac{\sqrt{4-a_n{}^2}}{2}$$

$$=\frac{2\sqrt{4-a_n{}^2}}{a_n}x-\frac{3\sqrt{4-a_n{}^2}}{2}$$

x 軸との交点は

$0=\frac{2\sqrt{4-a_n{}^2}}{a_n}x-\frac{3\sqrt{4-a_n{}^2}}{2}$ より

$x=\frac{3}{4}a_n$　したがって，$a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n$ という関係式が得られる。

これは初項1，公比 $\dfrac{3}{4}$ の等比数列であるから，

一般項は $a_n=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$

(1-3)

$$
\begin{aligned}
b_n&=P_nP_{n+1}=OP_n-OP_{n+1}\\
&=a_n-a_{n+1}\\
&=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{3}{4}\right)^{n}\\
&=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\left(1-\frac{3}{4}\right)\\
&=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}
\end{aligned}
$$
である。

(1-4)

$$
\sum_{n=1}^{\infty}b_n{}^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{16}\left(\frac{9}{16}\right)^{n-1}
$$
$$
=\frac{\frac{1}{16}}{1-\frac{9}{16}}=\frac{1}{7}
$$
である。

(2)

$$
\begin{aligned}
&z\bar{z}-(1-\sqrt{3}\,i)z-(1+\sqrt{3}\,i)\bar{z}=0\\
&\{z-(1+\sqrt{3}\,i)\}\{\bar{z}-(1-\sqrt{3}\,i)\}\\
&\qquad\qquad-(1+\sqrt{3}\,i)(1-\sqrt{3}\,i)=0\\
&\{z-(1+\sqrt{3}\,i)\}\{\overline{z-(1+\sqrt{3}\,i)}\}=4\\
&|z-(1+\sqrt{3}\,i)|^2=4\\
&|z-(1+\sqrt{3}\,i)|=2
\end{aligned}
$$

(2-1)　z が描く円の中心は $1+\sqrt{3}\,i$

(2-2)　z が描く円の半径は2である。

$\boxed{4}$

Oを原点とする座標平面の第1象限に曲線 $C: x^3+x^2y-3xy-y^2=0$ がある。

(1)　$x=\dfrac{3t-t^2}{t+1}$ とおくとき y を t を用いて表しなさい。

(2)　t が $0\leqq t\leqq 3$ の範囲を動くとき y の変域を求めなさい。

(3)　曲線 C によって囲まれる図形の面積を求めなさい。

解　説

曲線 $C: x^3+x^2y-3xy-y^2=0$ の式はそのままでは因数分解をすることもできず，微分して極致を求めることもできないためグラフの概形を求めるのが大変です。そこで，(1) の誘導に基づいてパラメーター t を使って考えていくことになります。(2) では y の変域を求める設問をおいていますが，誘導がなくでも xy それぞれの増減を求めてグラフの概形をかくことをしましょう。(3) の面積も当然パラメーター t を用いて計算します。グラフの概形とパラメーター t の値の対応に気をつけて計算しましょう。

解　答

(1)　$x^3+x^2y-3xy-y^2=0$ に $x=\dfrac{3t-t^2}{t+1}$ を代入すると

$$
\left(\frac{3t-t^2}{t+1}\right)^3+\left(\frac{3t-t^2}{t+1}\right)^2y-3\left(\frac{3t-t^2}{t+1}\right)y-y^2=0
$$
$$
y^2-\frac{t^4-3t^3-9t}{(t+1)^2}y+\left(\frac{3t-t^2}{t+1}\right)^3=0
$$
$$
y=\frac{\dfrac{t^4-3t^3-9t}{(t+1)^2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{t^4-3t^3-9t}{(t+1)^2}\right)^2-4\left(\dfrac{3t-t^2}{t+1}\right)^3}}{2}
$$
$$
=\frac{\dfrac{t^4-3t^3-9t}{(t+1)^2}\pm\dfrac{\sqrt{(t^4-3t^3-9t)^2-4(3t-t^2)^3(t+1)}}{(t+1)^2}}{2}
$$
$$
=\frac{t^4-3t^3-9t\pm\sqrt{(t^4-3t^3-9t)^2-4(3t-t^2)^3(t+1)}}{2(t+1)^2}
$$
$$
=\frac{3t^2-t^3}{t+1}
$$
である。

(2)　t で微分して

$$
\frac{dy}{dt}=\frac{(6t-3t^2)(t+1)-(3t^2-t^3)}{(t+1)^2}
$$
$$
=\frac{-2t(t^2-3)}{(t+1)^2}
$$
である。から増減表は

t	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	3
$\dfrac{dy}{dt}$	0	$+$	0	$-$	
y	0	↗	$6\sqrt{3}-9$	↘	0

増減表より

y の値域は $0 \leqq y \leqq 6\sqrt{3}-9$ である。

(3)

$$\frac{dx}{dt}=\frac{(3-2t)(t+1)-(3t-t^2)}{(t+1)^2}$$

$$=\frac{-(t-1)(t+3)}{(t+1)^2}$$

である。から増減表は

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$\frac{dx}{dt}$		$+$	0	$-$	
y	0	↗	1	↘	0

図形の面積は

$$\int_0^1 y_1 dx-\int_0^1 y_2 dx$$

y_1 は $1 \leqq t \leqq 3$　y_2 は $1 \leqq t \leqq 3$ のときの曲線である。

したがって，

$$\int_0^1 y_1 dx-\int_0^1 y_2 dx$$

$$=\int_3^1 \frac{3t^2-t^3}{t+1}\cdot\frac{-(t-1)(t+3)}{(t+1)^2}\,dt$$

$$-\int_0^1 \frac{3t^2-t^3}{t+1}\cdot\frac{-(t-1)(t+3)}{(t+1)^2}\,dt$$

$$\int \frac{3t^2-t^3}{t+1}\cdot\frac{-(t-1)(t+3)}{(t+1)^2}\,dt$$

$$=\int \frac{-t^2(t-3)(t-1)(t+3)}{(t+1)^3}\,dt$$

$u=t+1$ とおくと

$$\int \frac{-t^2(t-3)(t-1)(t+3)}{(t+1)^3}\,dt$$

$$=\int \frac{-(u-1)^2(t-4)(t-2)(u+2)}{u^3}\,du$$

$$=\int \frac{-u^5+6u^4-5u^3-20u^2+36u-16}{u^3}\,du$$

$$=\int\left(-u^2+6u-5-\frac{20}{u}+\frac{36}{u^2}-\frac{16}{u^3}\right)du$$

$$=\left[-\frac{u^2}{3}+3u^2-5u-20\log u-\frac{36}{u}+\frac{8}{u^3}\right]=I(u)$$

である。

したがって，求める面積は

$I(4)-I(2)-\{I(2)-I(1)\}$

$=I(4)-2I(2)+I(1)$ である。

$$I(4)=\left[-\frac{4^2}{3}+3\times4^2-5\times4-20\log 4-\frac{36}{4}+\frac{8}{4^3}\right]$$

$$=-\frac{64}{3}+19+\frac{1}{2}-20\log 4$$

$$I(2)=\left[-\frac{2^2}{3}+3\times2^2-5\times2-20\log 2-\frac{36}{2}+\frac{8}{2^3}\right]$$

$$=-\frac{8}{3}-14-20\log 2$$

$$I(1)=\left[-\frac{1^2}{3}+3\times1^2-5\times1-20\log 1-\frac{36}{1}+\frac{8}{1^3}\right]$$

$=-\dfrac{8}{3}-30$ から

$I(4)-2I(2)+I(1)=\dfrac{7}{6}$ である。

来月号では，東邦大学医学部の数学を攻略しますので，ご期待ください！

全12校の掲載予定は以下のとおりとなっております。

第85回／４月号　東邦大学医学部
第86回／５月号　東京女子医科大学
第87回／６月号　金沢医科大学
第88回／７月号　岩手医科大学医学部
第89回／８月号　北里大学医学部
第90回／９・10月合併号　日本大学医学部
第91回／10月臨時増刊号　聖マリアンナ医科大学
第92回／11月号　愛知医科大学
第93回／12月号　東京医科大学
第94回／１・２月合併号　杏林大学医学部
第95回／３月増刊号　東京慈恵会医科大学
第96回／３月号　昭和大学医学部