東大螢雪会　医学部数学　攻略演習

マンツーマン指導で医歯薬学部に多くの合格者を輩出している「東大螢雪会」では，主要な私立大学医学部の予想問題を作成しています。このコーナーでは，「東大螢雪会」の作成した予想問題を用いて，主要な私立大学医学部の数学を攻略するための演習を行います。毎号１校分の演習を行い，全12校の連載となる予定です。

今月号では，東京医科大学の数学を攻略します！

第81回　東京医科大学 編

東大螢雪会講師　小池　淳

東京医科大学の数学は，制限時間60分で①②が小問集合，③④が大問という構成です。大問であっても，誘導がない問題です。どの問題も，他の大学では誘導をつけて大問として出題される問題と同じ難易度の問題であり手ごわい出題といえます。今回の予想問題では７割程度の得点率を目指して下さい。

1

⑴　12枚のカードがある。このうち５枚のカードには数字の０，２枚には数字の１，５枚には数字の２が書かれている。この12枚のカードから同時に３枚のカードを取り出し，カードに書かれている数字をX，Y，Zとする。ただし，X≦Y≦Zとする。

Y＝1であるときZ＝1となる条件付確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$ である。

⑵　$a_1=2,\ a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k-1)(a_{k+1}-1)(a_{k+2}-1)$ とおくとき，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

2

x の４次方程式 $2x^4+x^3+16x+8=0$ の２つの虚数解を $\alpha,\ \beta$ とする。

$|\alpha^n+\beta^n|\geqq 10^4$ を満たす自然数は $\boxed{\text{ア}}\boxed{\text{イ}}$ である。

原点をOとする複素数平面上において，複素数 $\alpha,\ \beta$ の表す点をそれぞれA，Bとする。$\alpha,\ \beta$ が条件

$|\alpha|=\sqrt{2}$，$2(1+i)\alpha-(\sqrt{3}-i)\beta=0$ をみたすとき，三角形 OAB の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}+\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$ となる。

$\boxed{3}$

a を実数として，$f(x)=(x+a)^3-(x+a)$ とする。xy 平面において，曲線 $y=f(x)$ を C_1 とし，y 軸に関して曲線 C_1 と対称な曲線を C_2 とする。

⑴　C_1 と C_2 が 3 点で交わるとき，a のとりうる値の範囲は $-\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}<a<\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}$ である。

⑵　C_1 と C_2 が 3 点で交わるとき，C_1 と C_2 で囲まれた領域の面積は $a=\boxed{\text{オ}}$ とき最大値 $\boxed{\text{カ}}$ をとる。

$\boxed{4}$

⑴　$x>0$ とする。$\dfrac{1+2x-x^2}{1+x^2}$ の最大値は $\sqrt{\boxed{\text{ア}}}$ である。

⑵　$x>0$ とする。$\dfrac{1-8x-10x^2+8x^3+x^4}{(1+x^2)^2}$ の最大値は $\boxed{\text{イ}}$ である。

$\boxed{1}$

⑴

解　説

Y＝1 となるとき，X は 0 または 1，Z は 1 または 2 となります。

ただし，1 と書かれているカードは 2 枚しかないため X＝1 かつ Z＝1 という事象は起こりません。

問題文の設定が複雑なので，場合分けをして考えていくとよいでしょう。

A）X＝0，Y＝1，Z＝1

B）X＝0，Y＝1，Z＝2

C）X＝1，Y＝1，Z＝2 の 3 通りに場合分けすればよいことになります。

条件付確率はこの A，B，C に対する A の確率を求めることになります。

解　答

X，Y，Z の数字で場合分けをすると

A）X＝0，Y＝1，Z＝1

B）X＝0，Y＝1，Z＝2

C）X＝1，Y＝1，Z＝2

の 3 種類の場合になる。

A）の確率は $\dfrac{5\times{}_2C_2}{{}_{12}C_3}=\dfrac{5\times3\times2\times1}{12\times11\times10}$

B）の確率は $\dfrac{5\times2\times5}{{}_{12}C_3}=\dfrac{5\times2\times5\times3\times2\times1}{12\times11\times10}$

C）の確率は $\dfrac{{}_2C_2\times5}{{}_{12}C_3}=\dfrac{5\times3\times2\times1}{12\times11\times10}$

したがって，求める条件付確率は

$$\frac{\dfrac{5\times3\times2\times1}{12\times11\times10}}{\dfrac{5\times3\times2\times1}{12\times11\times10}+\dfrac{5\times2\times5\times3\times2\times1}{12\times11\times10}+\dfrac{5\times3\times2\times1}{12\times11\times10}}$$

$$=\frac{5\times3\times2\times1}{5\times3\times2\times1+5\times2\times5\times3\times2\times1+5\times3\times2\times1}$$

$=\dfrac{1}{1+10+1}=\dfrac{1}{12}$

である。

⑵

解　説

$a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$ は典型的な形の漸化式ではないため解き方を知っているということはないでしょう。

そこで，具体的に求めてみましょう。

$a_2=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

$a_3=2-\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}$

$a_4=2-\dfrac{3}{4}=\dfrac{5}{4}$

すると，$a_n=\dfrac{n+1}{n}$ という形が予想できるでしょう。

本来は，帰納法での証明が必要ですが，マークシート形式であれば $a_n=\dfrac{n+1}{n}$，$a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n+1}$ を代入して確認すれば十分です。

解答ではこの形の漸化式の解法を示します。

あとは,$(a_k-1)(a_{k+1}-1)(a_{k+2}-1)=\dfrac{1}{k}\dfrac{1}{k+1}\dfrac{1}{k+2}$

となるので部分分数分解をして部分和を求めましょう。

$\dfrac{1}{k}\dfrac{1}{k+1}\dfrac{1}{k+2}=\dfrac{A}{k}\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{B}{k+1}\dfrac{1}{k+2}$ の形で部分分数分解することで隣り合う項の和を消すことができます。

しっかり覚えておきましょう。

解　答

$a_n\neq1$ である。

$a_{n+1}-1=1-\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{a_n-1}{a_n}$

両辺の逆数をとって

$\dfrac{1}{a_{n+1}-1}=\dfrac{a_n}{a_n-1}=\dfrac{1}{a_n-1}+1$

$b_n=\dfrac{1}{a_n-1}$ とおくと

$b_{n+1}=b_n+1$

したがって，数列 $\{b_n\}$ は初項 1，公差 1 の等差数列であるから，一般項は

$b_n=n$

である。

したがって,

$a_n-1=\dfrac{1}{n}$

$a_n=\dfrac{1}{n}+1$

である。

$(a_k-1)(a_{k+1}-1)(a_{k+2}-1)$

$$=\left(\frac{1}{k}+1-1\right)\left(\frac{1}{k+1}+1-1\right)\left(\frac{1}{k+2}+1-1\right)$$

$=\dfrac{1}{k}\dfrac{1}{k+1}\dfrac{1}{k+2}$

部分分数分解すると

$\dfrac{1}{k}\dfrac{1}{k+1}\dfrac{1}{k+2}=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{k(k+1)}-\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$

となる。

部分和は

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-1)(a_{k+1}-1)(a_{k+2}-1)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

となるので，極限は

$\dfrac{1}{4}$

である。

$\boxed{2}$

解　答

$2x^4+x^3+16x+8=0$

$(2x+1)(x^3+8)=0$

$(2x+1)(x+2)(x^2-2x+4)=0$

よって，虚数解 α，β は

$x^2-2x+4=0$

$x^3=-8$

を満たすから $\alpha^3=\beta^3=-8=(-2)^3$，また

$\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=4$

m を自然数とする。

$n=3m-2$ のとき

$\alpha^n+\beta^n=(\alpha^3)^m\,\alpha^{-2}+(\beta^3)^m\,\beta^{-2}$

$$=(-8)^m\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)=(-8)^m\frac{\alpha^2+\beta^2}{(\alpha\beta)^2}$$

$$=(-8)^m\frac{2^2-2\times4}{4^2}=(-8)^m(-2^{-2})$$

$$=-(-2)^{3m-2}=-(-2)^n$$

$n=3m-1$ のとき

$$\alpha^n+\beta^n=(\alpha^3)^m\alpha^{-1}+(\beta^3)^m\beta^{-1}$$
$$=(-8)^m\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=2^{-1}(-2)^{3m}$$
$$=-(-2)^n$$

$n=3m$ のとき

$$\alpha^n+\beta^n=(\alpha^3)^m+(\beta^3)^m=2\times(-2)^{3m}$$
$$=2(-2)^n$$

$|\alpha^n+\beta^n|\geqq 10^4$

$n=3m-2$ のとき　$2^{3m-2}\geqq 10000$

$m=5$ のとき，$2^{3m-2}=2^{13}=1024\times 8=8192$

$m=6$ のとき，$2^{3m-2}=2^{16}=1024\times 64=65536$

よって，最小の自然数は16

$n=3m-1$ のとき　$2^{3m-1}\geqq 10000$

$m=4$ のとき，$2^{3m-1}=2^{11}=1024\times 2=2048$

$m=5$ のとき，$2^{3m-1}=2^{14}=1024\times 16=16384$

よって，最小の自然数は14

$n=3m$ のとき　$2^{3m}\geqq 10000$

$m=4$ のとき　$2^{3m}=2^{12}=1024\times 14=4096$

$m=5$ のとき　$2^{3m}=2^{15}=1024\times 32=32768$

よって，最小の自然数は15

以上から，求める最小の自然数 n は14

解　説

点 A を表す複素数 α については大きさがわかっているので，α と β のなす角，β の大きさがわかれば面積を求めることができます。

$\dfrac{\beta}{\alpha}$ を計算することによって α と β のなす角，大きさの比を求めることができます。

例えば，α を $\alpha=\sqrt{2}+0i$ とおいて条件式に代入することでを β 具体的に求めるという方法も取れますが，できる限り成分計算をせずに求めらるようになりましょう。

どうしても複素数が苦手という場合は，$\alpha=(\sqrt{2},0)$ として xy 平面で考えることもできます。

解　答

$2(1+i)\alpha-(\sqrt{3}-i)\beta=0$ より

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{2(1+i)}{\sqrt{3}-i}$$
$$=\frac{2\{\sqrt{2}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)\}}{2\{\cos(-30^\circ)+i\sin(-30^\circ)\}}$$
$$=\sqrt{2}(\cos 75^\circ+i\sin 75^\circ)$$

したがって，β は大きさが α の $\sqrt{2}$ 倍でなす角が 75° であることがわかる。

面積は

$$\frac{1}{2}|\alpha||\beta|\sin 75^\circ$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{2}|\alpha|^2(\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ)$$
$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

である。

$\boxed{3}$

解　説

(1)

まずは，y 軸に関して対称な点を考えて曲線 C_2 の方程式を求めることになります。

点 $\mathrm{P}(x,y)$ と y 軸に関して線対称な点を $\mathrm{Q}(X,Y)$ とすると，$X=-x$，$Y=y$ ということがわかります。

したがって，曲線 C_2 を表す方程式はとなります。

この後に，C_1 と C_2 が3点で交わる条件を考えます。

C_1 と C_2 の方程式を連立して解を3つもつことを考えることになります。

3次方程式となりますが，そのまま考えるのではなく必ず高次方程式の場合は因数分解を考えましょう。

(2)

C_1 と C_2 が3点で交わるため囲まれた領域は2つの部分に分かれますが，y 軸に関して対称なため，面積は等しいことは明らかでしょう。一方の面積の最大を考えればよいことになります。

解　答

(1)

点 $\mathrm{P}(x,y)$ と y 軸に関して線対称な点を $\mathrm{Q}(X,Y)$

とすると，$X=-x$，$Y=y$ であるから，曲線 C_2 を表す方程式は $y=f(-x)$ より

$y=f(-x)$

$=(-x+a)^3-(-x+a)$

である。

連立すると

$(x+a)^3-(x+a)=(-x+a)^3-(-x+a)$

$(x+a)^3-(x+a)-(-x+a)^3-(-x+a)=0$

$2(x^3+3a^2x-x)=0$

$2x(x^2+3a^2-1)=0$

となるため，2次方程式 $x^2+3a^2-1=0$ が異なる2実解をもてばよい。

$x^2=1-3a^2$

より

$1-3a^2>0$

が条件となる。

したがって，$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}<a<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ が条件である。

(2)

C_1 と C_2 が3点で交わるため囲まれた領域のうち $x>0$ の部分の面積は

$$\int_0^{\sqrt{1-3a^2}}(-x+a)^3-(-x+a)-(x+a)^3+(x+a)\,dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{1-3a^2}}-2(x^3+3a^2x-x)\,dx$$

$$=-2\left[\frac{x^4}{4}+\frac{3a^2x^2}{2}-\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-3a^2}}$$

$$=2\left\{\frac{(1-3a^2)^2}{4}+\frac{(3a^2-1)(1-3a^2)}{2}\right\}$$

$$=\frac{(1-3a^2)^2}{2}$$

である。

この面積は $1-3a^2$ が最大のときに最大になる。

したがって，$a=0$ のときに最大値1をとる。

$\boxed{4}$

解　説

(1)

最大値を求めるためには，微分することもできますが，できるだけ簡単な計算で求めるためには，相加相乗平均，変数変換をすること考えましょう。

本問の場合は $\tan\dfrac{a}{2}=x$ とおくと変数を a に変換することができます。

$\tan\dfrac{a}{2}=x$ より $\sin a=\dfrac{2x}{1+x^2}$，$\cos a=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ であることがわかります。

また，変数の変域は $0<x=\tan\dfrac{a}{2}$ より $0<\dfrac{a}{2}<\dfrac{\pi}{2}$

したがって $0<a<\pi$ となります。

このことから，(1)(2)の関係式はそれぞれ

$$\frac{1+2x-x^2}{1+x^2}=\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$=\sin a+\cos a$$

$$\frac{1-8x-10x^2+8x^3+x^4}{(1+x^2)^2}$$

$$=\frac{(1-x^2)^2-x(1-x^2)-8x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$=\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}-\frac{x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}-\frac{8x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$=\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2-\frac{x}{1+x^2}\cdot\frac{1-x^2}{1+x^2}-8\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2$$

$$=\cos^2 a-\sin a\cos a-8\sin^2 a$$

と変形することができます。

この後は三角関数の倍角の公式，合成を用いることで最大値を求めることができます。

本問では，(1)では相加相乗平均，(2)では変数変換を用いて解答します。

$\tan\dfrac{a}{2}=x$ と変数変換をすることを誘導なしに用いることに気づくには練習が必要ですが，誘導が付いたときにはすぐ反応できるよう準備しましょう。

解　答

(1)

$$\frac{1+2x-x^2}{1+x^2}=-1+\frac{2+2x}{1+x^2}$$

$1+x=t$ とおくと

$$-1+\frac{2+2x}{1+x^2}=-1+\frac{2t}{t^2-2t+2}$$

$$=-1+\frac{2}{\dfrac{t^2-2t+2}{t}}$$

$$=-1+\frac{2}{t-2+\dfrac{2}{t}}$$

$0<t$ より相加相乗平均より

$$t+\frac{2}{t}\geqq 2\sqrt{t\frac{2}{t}}=2\sqrt{2}$$

であるから

$$\frac{1}{2\sqrt{2}-2}\geqq\frac{1}{t+\dfrac{2}{t}-2}$$

である。

したがって，最大値は

$$-1+\frac{2}{t-2+\dfrac{2}{t}}\leqq-1+\frac{2}{2\sqrt{2}-2}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}$$

となる。

(2)

$\tan\dfrac{a}{2}=x$ とおくと

$$\tan a=\frac{2\tan\dfrac{a}{2}}{1-\tan^2\dfrac{a}{2}}$$

$$=\frac{2x}{1-x^2}$$

したがって，$\sin a=\dfrac{2x}{1+x^2}$， $\cos a=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ である。

$0<x=\tan\dfrac{a}{2}$ より $0<\dfrac{a}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ したがって変数の変域は $0<a<\pi$ である。

$$\frac{1-8x-10x^2+8x^3+x^4}{(1+x^2)^2}$$

$$=\frac{(1-x^2)^2-8x(1+x^2)-8x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$=\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}-\frac{8x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}-\frac{8x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$=\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2-4\frac{2x}{1+x^2}\cdot\frac{1-x^2}{1+x^2}-2\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2$$

$=\cos^2 a-4\sin a\cos a-2\sin^2 a$

となる。倍角の公式より

$\cos^2 a-4\sin a\cos a-2\sin^2 a$

$$=\frac{1+\cos 2a}{2}-2\sin 2a-(1-\cos 2a)$$

$$=\frac{3\cos 2a-4\sin 2a-1}{2}$$

合成すると

$$\frac{3\cos 2a-4\sin 2a-1}{2}=\frac{5\sin(2a+\phi)-1}{2}$$

$\sin(2a+\phi)=1$ のとき最大値をとり，その値は 2 となる。

来月号では，杏林大学医学部の数学を攻略しますので，ご期待ください！

全12校の掲載予定は以下のとおりとなっております。

第73回／４月号　東邦大学医学部
第74回／５月号　東京女子医科大学
第75回／６月号　金沢医科大学
第76回／７月号　岩手医科大学医学部
第77回／８月号　北里大学医学部
第78回／９・10月合併号　日本大学医学部
第79回／10月臨時増刊号　聖マリアンナ医科大学
第80回／11月号　愛知医科大学
第81回／12月号　東京医科大学
第82回／１・２月合併号　杏林大学医学部
第83回／３月増刊号　東京慈恵会医科大学
第84回／３月号　昭和大学医学部