東大螢雪会 医学部数学 攻略演習

マンツーマン指導で医歯薬学部に多くの合格者を輩出している「東大螢雪会」では，主要な私立大学医学部の予想問題を作成しています。このコーナーでは，「東大螢雪会」の作成した予想問題を用いて，主要な私立大学医学部の数学を攻略するための演習を行います。毎号1校分の演習を行い，全12校の連載となる予定です。

今月号では，岩手医科大学医学部の数学を攻略します！

第76回 岩手医科大学医学部 編

東大螢雪会講師　小池　淳

岩手医科大学医学部の数学は，制限時間60分で大問３題の出題です。標準的な問題が多く，難易度は高くないものの，多少非定型的な問題も含まれます。また，確率，微分積分の出題頻度が高く，差が付きそうな出題がされているのも特徴です。今回の予想問題も微分積分の出来が左右します。今回の予想問題では８割程度の得点率を目指して下さい。

1　１つのさいころを投げることを繰り返し，同じ目が３回出たら終わりとして，それまでに出た目の和を得点とするゲームを行う。

問１　このゲームが終わるまでにさいころを投げる最小の回数は３回であり，その確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$ である。また，最大の回数は $\boxed{\text{エオ}}$ 回である。

問２　このゲームでの最小の得点は $\boxed{\text{カ}}$ 点であり，最大の得点は $\boxed{\text{キク}}$ 点である。

問３　このゲームが４回で終わる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ である。

問４　このゲームで得点が５点以下である確率は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{スセソ}}}$ であり，得点がちょうど８点である確率は $\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チツテ}}}$ である。

2

問１　n を自然数とし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n < \dfrac{1}{5000} < \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$ を満たす n は $\boxed{\text{アイ}}$ である。

問 2　実数 x, y が連立不等式 $4x-3y \geqq 1$，$-2x+6y \geqq 1$ を満たすとき，$k=\log_8(4^x+8^y)$ を考える。

$4^x=s$，$8^y=t$ とおくと，$s \geqq$ $\boxed{\text{ウ}}$，$t \geqq$ $\boxed{\text{エ}}$ 値である。

$s+t$ は，$s=$ $\boxed{\text{オ}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{カ}}$ をとる。

したがって，k の最小値は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。

$\boxed{3}$　n を 0 以上の整数とし，$I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$ とさだめる。

問 1　$I_0=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\pi$ である。

問 2　$I_n+I_{n+2}=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{n+\boxed{\text{エ}}}$ である。

問 3　$S_n=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n-1}$ とおくと，$S_n=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\pi+(-1)^{n-1}I_{2n}$ である。

問 4　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n=$ $\boxed{\text{キ}}$ であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\pi$ である。

$\boxed{1}$

解　説

まずは，ゲームのルールをしっかり理解しましょう。理解するためには簡単な場合を具体的に考えて確かめていくことが必要です。

このゲームでは同じ数が 3 回出ると終了ですから，1，2，5，1，1 という目がでると 1 が 3 回出てゲーム終了となります。

問 1　3 回で終わるというのは同じ目が 3 回連続して出るというのはすぐに見破れるでしょう。あとは，その確率を求めるだけです。

では，投げる数が最大とはどういうことでしょう。同じ目は 2 回まで出てもよいことに気づくと，6 種類の目が 2 回ずつでて，最後に 1 から 6 どれが出てもゲームが終了することが見破れるでしょう。

問 2　得点が最小になるのは 3 回で終わるとき，最大になるのは13回で終わるときです。その中で得点が最小，最大になることを考えましょう。

問 3　4 回で終わるのは 1 回目から 3 回目の間に 1 回だけ異なる目が出るときです。

問 4　得点が 5 点以下となるのは，

3 点：1 + 1 + 1，

5 点：1 + 1 + 1 + 2 のときのみです。

3 が 3 回出たときの得点が 9 点ですから，3 回出る目は 1 か 2 に絞られます。2 が 3 回出るときは 2 + 2 + 2 + 2 = 8 なので，2 が 4 回出ることになりルールに反します。

したがって，3 回出るのは 1 と決まります。5 点取るには 5，2 + 3，1 + 4，1 + 1 + 3，1 + 2 + 2 という組み合わせがありますが，1 は出せないので，5，2 + 3 に絞ることができます。

解　答

問 1　投げる回数が 3 回となるのは同じ目が 3 回連続して出るときだから，

$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 6=\frac{1}{36}$$

1，2，3，4，5，6の目がそれぞれ2回出て，一つの目がもう1回出る場合が投げる回数の最大となる。

したがって，$6\times 2+1=13$回

問2　最少の得点は$(1,1,1)$のときだから3点であり，最大の得点は1，2，3，4，5が2回出て6が3回出るときだから48点である。

問3　投げる回数が4回となるのは，1回目から3回目の間に異なる目が1回出てそれ以外は同じ目が3回目出るときだから

$$\frac{{}_3C_1\times 6}{6^4}=\frac{3\times 6}{6^4}=\frac{1}{72}$$

問4　得点が5点以下となるのは$(1,1,1)$，$(1,1,1,2)$のときの2通りで$(1,1,1)$がでるときの確率は

$$\frac{1}{6^3}$$

$(1,1,1,2)$が出るときの確率は2が1から3回目のどこかで出ればよいから

$$\frac{3}{6^4}$$

したがって，求める確率は

$$\frac{1}{6^3}+\frac{3}{6^4}=\frac{9}{6^4}=\frac{1}{144}$$ である。

得点がちょうど8点になるのは$(1,1,1,5)$，$(1,1,1,2,3)$のときの2通りで，$(1,1,1,5)$が出るときの確率は5が1から3回目のどこかで出ればよいから

$$\frac{3}{6^4}$$

$(1,1,1,2,3)$が出るときの確率は2，3が1から4回目のどこかで出ればよいから

$$\frac{{}_4P_2}{6^4}$$

したがって，求める確率は

$$\frac{3}{6^4}+\frac{4\times 3}{6^4}=\frac{15}{6^4}=\frac{5}{432}$$ である。

$\boxed{2}$

解　説

問1　基本問題です。常用対数の計算をミスなく行いましょう。

問2　これも誘導に従えばよい基本問題です。s, tの条件を領域として表して最大最小を考えましょう。

解　答

不等式について10を底とする対数をとると

$$\log_{10}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n<\log_{10}\frac{1}{5000}<\log_{10}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$$

$$n\log_{10}\frac{\sqrt{3}}{2}<\log_{10}(5000)^{-1}<(n-1)\log_{10}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\log_{10}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\log_{10}3-\log_{10}2$$

$$=\frac{0.4771}{2}-0.3010$$

$$=-0.06245$$

$$\log_{10}\frac{1}{5000}=\log_{10}\frac{2}{10000}$$

$$=\log_{10}2-\log_{10}10000$$

$$=0.3010-4$$

$$=-3.699$$

したがって，不等式は

$-0.06245n<-3.699$

$$n>\frac{3.699}{0.06245}=59.23$$

$-3.699<-0.06245(n-1)$

$$n-1<\frac{3.699}{0.06245}=59.23$$

$n<60.23$

$59.23<n<60.23$

$n=60$

$\log_8(4^x+8^y)=\log_8(s+t)$であるから

$s+t$の最小値を求めればよい。

$4x-3y\geqq 1$より

$2^{4x-3y} \geqq 2^1$

$2^{4x} \times 2^{-3y} \geqq 2$

$4^{2x} \times 8^{-y} \geqq 2$

$\dfrac{s^2}{t} \geqq 2$

$-2x+6y \geqq 1$ より

$2^{-2x+6y} \geqq 2^1$

$2^{-2x} \times 2^{6y} \geqq 2$

$4^{-x} \times 8^{2y} \geqq 2$

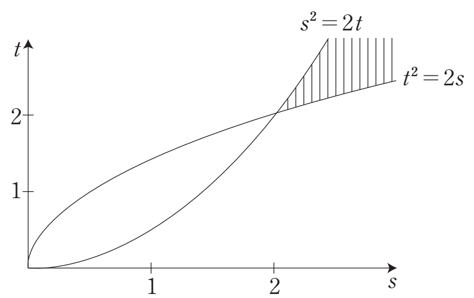
$\dfrac{t^2}{s} \geqq 2$

$s>0,\ t>0$ であるから

$s^2 \geqq 2t$

$t^2 \geqq 2s$

この不等式を図示すると図の斜線部分となる。(境界を含む)



図の領域と直線 $s+t=k$ が共有点をもつような k の最小値は交点を通るときであり，$s=t=2$ のときである。

このとき

$\log_8(s+t)=\log_8 4$

$=\dfrac{\log_2 4}{\log_2 8}=\dfrac{2}{3}$

$\boxed{3}$

解　説

本問の積分はそのままでは計算ができないので，漸化式を作って考えていきます。

次のような n 乗の積分計算の際に漸化式をつくって考える問題は頻出事項です。

$$J_n=\int \sin^n x dx,\ K_n=\int (\log x)^n dx,$$

$$L_{mn}=\int_0^1 x^m(1-x)^n x dx$$

例えば，

$K_n=\int (\log x)^n dx$

$=\int x'(\log x)^n dx$

$=x(\log x)^n-\int xn\dfrac{1}{x}(\log x)^{n-1} dx$

$=x(\log x)^n-n\int (\log x)^{n-1} dx$

$=x(\log x)^n-nK_{n-1}$

となります。

$$J_n=\int \sin^n x dx=-\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n}+\frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$L_{mn}=\int_0^1 x^m(1-x)^n x dx=\frac{n}{m+n+1} I_{n-1}$$

についても，同様に部分積分を行うことで導くことができます。

結果を覚えるのではなく，部分積分を繰り返して漸化式を作ることに習熟するようにしましょう。

本問の積分 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$ の場合は，I_n と I_{n+2} を組み合わせることによって容易に積分ができます。

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}=(\tan x)'$$

がポイントです。この関係はぜひ覚えておきましょう。

問 4 の極限はそのままでは計算できないので，はさみうちの原理を利用します。

解　答

問 1

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^0 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx=[x]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

問 2　I_n+I_{n+2} を計算すると

$$I_n+I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2} x dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^n x+\tan^{n+2} x) dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,(1+\tan^2 x)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,(\tan x)'\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{n+1}\tan^{n+1} x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{n+1}$$

問 3

$$I_0+I_2=\frac{1}{1},\quad I_2+I_4=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3},\quad I_4+I_6=\frac{1}{4+1}=\frac{1}{5},$$

$$\cdots,\quad I_{2n-2}+I_{2n}=\frac{1}{2n-2+1}=\frac{1}{2n-1}$$

であるから

$$S_n=(I_0+I_2)-(I_2+I_4)+(I_4+I_6)-\cdots+(-1)^{n-1}(I_{2n-2}+I_{2n})$$

$$=I_0+(-1)^{n-1} I_{2n}$$

$$=\frac{\pi}{4}+(-1)^{n-1} I_{2n}$$

となる。

問 4

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ のとき $0\leqq \tan x\leqq\dfrac{4}{\pi}x$ であるから

$$0\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x dx\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{4}{\pi}x\right)^n dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{4}{\pi}x\right)^n dx=\left(\frac{4}{\pi}\right)^n\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\left(\frac{4}{\pi}\right)^n\frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}$$

$$=\frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$$

はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x dx=0$$

$\therefore\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n=0$ である。

したがって，

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\pi}{4}+(-1)^{n-1} I_{2n}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{4}$$

となる。

来月号では，岩手医科大学の数学を攻略しますので，ご期待ください！

全12校の掲載予定は以下のとおりとなっております。

第73回／４月号　東邦大学医学部
第74回／５月号　東京女子医科大学
第75回／６月号　金沢医科大学
第76回／７月号　岩手医科大学医学部
第77回／８月号　北里大学医学部
第78回／９・10月合併号　日本大学医学部
第79回／10月臨時増刊号　聖マリアンナ医科大学
第80回／11月号　愛知医科大学医学部
第81回／12月号　東京医科大学
第82回／１・２月合併号　杏林大学医学部
第83回／３月増刊号　東京慈恵会医科大学
第84回／３月号　昭和大学医学部