東大螢雪会 医学部数学 攻略演習

マンツーマン指導で医歯薬学部に多くの合格者を輩出している「東大螢雪会」では，主要な私立大学医学部の予想問題を作成しています。このコーナーでは，「東大螢雪会」の作成した予想問題を用いて，主要な私立大学医学部の数学を攻略するための演習を行います。毎号１校分の演習を行い，全12校の連載となる予定です。

今月号では，東京女子医科大学の数学を攻略します！

第74回 東京女子医科大学 編

東大螢雪会講師　小池　淳

東京女子医科大学の数学は，制限時間は60分です。問題は典型的なものが多いが時間が短いため素早い判断・処理が要求されています。また，一部記述式の証明問題なども出題されるので時間的にかなり厳しい試験といえるでしょう。今回の予想問題はやや分量が多いので60分で６～７割以上を合格の目安として下さい。

$\boxed{1}$　各項が正の実数である数列$\{a_n\}$があり，初項から第 n 項までの和を S_n とおく。この数列は $a_n{}^2+a_n-2=2S_n$ を満たしている。数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

$\boxed{2}$　$x\geqq 0$ の範囲で，つねに $x^3+x^2-x+3\geqq ax$ が成立するような実数 a の最大値を求めよ。

$\boxed{3}$　１から10までの整数が１つずつ書かれたカードが10枚入った袋がある。袋からカードを１枚ひき書かれている整数を記録して袋の中に戻す試行を３回行う。記録された整数のうち最も大きいものを M，最も小さいものを m とする。

⑴　$6<m$ となる確率を求めよ。

⑵　$k=1,2,3,\cdots,10$ に対して $m\leqq k\leqq M$ となる確率を $p(k)$ とする。$p(k)$ の最大値を求めよ。

$\boxed{4}$　関数 $f(x)$ が $f(x)-e^{-x}=\int_0^x\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt$ を満たしている。曲線 $y=f(x)$ と x 軸，y 軸，直線 $x=1$ で囲まれた部分を y 軸の周りに１回転させた立体の体積を求めよ。

$\boxed{1}$

解　説

数列，整数問題，確率の問題で題意がよく見えない場合は，まず具体的な場合を考えて実験しましょう。数列の場合は，与えられた関係式に $n=1$, $2,3\cdots$を代入して実際に計算してみることになります。

本問では，

$n=1$ の場合

$a_1{}^2+a_1-2=2S_1=2a_1$

$a_1{}^2-a_1-2=0$

$(a_1-2)(a_1+1)=0$

$a_1=-1,2$

各項が正の実数であるから

$a_1=2$

$n=2$ の場合

$a_2{}^2+a_2-2=2S_2=2a_1+2a_2$

$a_2{}^2-a_2-6=0$

$(a_2-3)(a_2+2)=0$

$a_2=-2, 3$

各項が正の実数であるから

$a_2=3$

と実験することになります。

漸化式に数列の和 S_n が入っている場合は，$a_n=S_n-S_{n-1}$ を用いて a_n だけの関係式にすることは常識でしょう。

本問の関係式は

$a_n{}^2+a_n-2=2S_n$

$a_{n-1}{}^2+a_{n-1}-2=2S_{n-1}$

の辺々を引いて

$a_n{}^2+a_n-a_{n-1}{}^2=2(S_n-S_{n-1})$

$a_n{}^2-a_{n-1}{}^2+a_n-a_{n-1}=2a_n$

$(a_n-a_{n-1})(a_n+a_{n-1})-(a_n+a_{n-1})=0$

$(a_n-a_{n-1}-1)(a_n+a_{n-1})=0$

という関係式を得ることができます。

本問では，

⑴　a_2 を求めよ。

⑵　a_n と a_{n-1} の関係式を求めよ。

という誘導の後に

⑶　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

という問題にして，誘導が入ることが多いのですが，東京女子医科大学の問題では誘導なく結論を求めさせる問題が出題されます。東京女子医科大学の数学を攻略するためには，誘導に乗るのではなく，何をするべきか，いつでも考えながら学習を進めましょう。

解　答

$n=1$ の場合

$a_1{}^2+a_1-2=2S_1=2a_1$

$a_1{}^2-a_1-2=0$

$(a_1-2)(a_1+1)=0$

$a_1=-1, 2$

各項が正の実数であるから

初項は $a_1=2$

与えられた関係式を $n, n-1$ の場合で考えて

$a_n{}^2+a_n-2=2S_n$

$a_{n-1}{}^2+a_{n-1}-2=2S_{n-1}$

の辺々を引いて整理すると

$a_n{}^2+a_n-a_{n-1}{}^2-a_{n-1}=2(S_n-S_{n-1})$

$a_n{}^2-a_{n-1}{}^2+a_n-a_{n-1}=2a_n$

$(a_n-a_{n-1}-1)(a_n+a_{n-1})=0$

$a_n+a_{n-1}=0$ または $a_n-a_{n-1}-1=0$ となる。

各項が正の実数であるから $a_n-a_{n-1}-1=0$ となる。

$a_n-a_{n-1}=1$ という漸化式から数列 $\{a_n\}$ は公差 1 の等差数列である。

初項は 2 であるから

一般項は $a_n=n+1$ となる。

2

解　説

不等式の問題ですから，$x^3+x^2-x-ax+3\geqq 0$ と変形して考えるのが一般的でしょう。この後はグラフを描けばよく，その際必要であれば微分することになります。ただし，実数 a がはいるため極値をとる x 座標が変化する可能性があります。そこで，考えるのが定数分離ということになります。少し関数が複雑になっても場合分けをしなければラクになるということです。

定数分離をする際には割り算をする必要があるので，0 で割ることにならないか，不等号の向きは変わらないかしっかりチェックをしましょう。

東京女子医科大学では，難しい問題だけでなく，解きやすい問題が必ず出題されます。今回のセットでは，この 2 があたります。必ず完答できるようにしましょう。

解　答

$x=0$ のときは $3\geqq 0$ となり成立する。

$x>0$ のとき $x^3+x^2-x+3\geqq ax$ の両辺を x で割って，

$$\frac{x^3+x^2-x+3}{x}\geqq a$$

$f(x)=\dfrac{x^3+x^2-x+3}{x}$ とおくと

$$f'(x)=2x+1+\frac{-3}{x^2}$$

$$=\frac{2x^3+x^2-3}{x^2}$$

$=\dfrac{(x-1)(2x^2+3x+3)}{x^2}$

分母は必ず正の値となるから，分子の符号を考えて増減表は

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	4	↗

となる。

$x>0$ の範囲でつねに $\dfrac{x^3+x^2-x+3}{x}\geqq a$ が成り立つための条件は $a\leqq 4$ である。

したがって，求める実数 a の最大値は 4 である。

3

解　説

1同様本問でも具体的に実験して調べましょう。

$k=1$ のときは $m=1$，$1\leqq M$　1 が少なくとも 1 枚出ればよい。

$k=2$ のときは $m\leqq 2$，$2\leqq M$　2 以下が少なくとも 1 枚，2 以上が少なくとも 1 枚出ればよい。

直接求めるとすれば，

2 が 1 枚出る場合。残りの 2 枚は何でもよい

2 が出ない場合。1 が 1 枚，3 以上から 2 枚でるか，1 が 2 枚 3 以上から 1 枚でる。

というように場合分けすることになります。

余事象を使うと，

A：1，2 が 1 枚も出ない場合　または

B：2 以上が 1 枚も出ない場合となります。

この事象は $A\cup B-A\cap B$ となりますが，本問では $A\cap B$ が空集合となるので余事象の方が計算が簡単となります。

(1)はこの A を考えるための誘導ということになります。

解　答

(1)　$6<m$ となるのは，7 以上が 3 枚でるときだから，その確率は $\dfrac{4^3}{10^3}=\dfrac{8}{125}$

(2)　$k<m$ となる事象を A，$M<k$ となる事象を B とおく。

$1\leqq k\leqq 9$ のとき，A となるのは，$k+1$ 以上が 3 枚でるときだから，その確率は $\dfrac{(10-k)^3}{10^3}$

$k=10$ のとき，A となることはないから，その確率は 0 であり $\dfrac{(10-k)^3}{10^3}$ と表すことができる。

$2\leqq k\leqq 10$ のとき，B となるのは，$k-1$ 以上が 3 枚でるときだから，その確率は $\dfrac{(k-1)^3}{10^3}$

$k=1$ のとき，B となることはないから，その確率は 0 であり $\dfrac{(k-1)^3}{10^3}$ と表すことができる。

余事象を考えて $m\leqq k\leqq M$ となる確率 $p(k)$ は

$$p(k)=1-\frac{(10-k)^3}{10^3}-\frac{(k-1)^3}{10^3}$$

$$=\frac{10^3-(10^3-3k10^2+3k^210-k^3)-(k^3-3k^2+3k-1)}{10^3}$$

$$=\frac{-27k^2+297k+1}{10^3}$$

$$=\frac{-1}{10^3}\left\{27(k^2-11k)-\frac{1}{27}\right\}$$

$$=\frac{-1}{10^3}\left\{27\left(k-\frac{11}{2}\right)^2-27\left(\frac{11}{2}\right)^2-\frac{1}{27}\right\}$$

したがって，$p(k)$ は $k=5,6$ のとき最大となり，その値は

$$p(5)=p(6)=1-\frac{5^3}{10^3}-\frac{4^3}{10^3}$$

$$=\frac{10^3-125-64}{10^3}$$

$$=\frac{811}{1000}$$

となる。

4

解　説

本問に誘導をつけるとすれば

(1)　$f'(x)$ を求めよ。

(2)　$f(0)$ を求めよ。

(3)　$f(x)$ を求め，図示せよ。

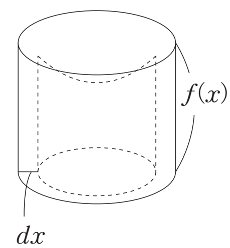
(4)　曲線 $y=f(x)$ と x 軸，y 軸，直線 $x=1$ で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させた立体の体積を求めよ。

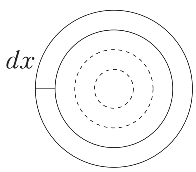
となるでしょう。誘導がついていないので，自ら

問題の考え方を作っていくしかありません。
積分の形で表された関数を考えていく場合は，積分区間が定数なのか，変数なのか確認しましょう。定数であれば，定積分値を置いて計算することになりますが，変数の場合は両辺微分していきます。
$\int_0^x f(t)\,dt$ を微分すると $f(x)$ となることは基本中の基本でしょう。
立体の体積を求める際は図を描いて，どの方向に積分していくか（どのように立体を切るか）を考えましょう。
本問では
① y 軸に垂直な平面で切り回転体の体積を考える方法
② y 軸を中心とする円筒で切り体積を考える方法（いわゆるバームクーヘン分割）
が考えられます。
解答では
①一般的な体積の求め方を使っています。
②バームクーヘン分割での体積の求め方
求める体積は半径 x 高さ $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 厚さ dx の円筒を集めたものだから

$V=2\pi\int_0^1 xf(x)\,dx$

$=2\pi\int_0^1 x\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)dx$





となる。以下部分積分をして計算すればよい。

解　答

$f(x)-e^{-x}=\int_0^x \sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt$ の両辺を x で微分して

$f'(x)+e^{-x}=\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}$　両辺を 2 乗して

$\{f'(x)\}^2+2e^{-x}f'(x)+e^{-2x}=1+\{f'(x)\}^2$

$2e^{-x}f'(x)+e^{-2x}=1$

$f'(x)=\dfrac{1-e^{-2x}}{2e^{-x}}$

$=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

両辺を x で積分すると

$\int f'(x)\,dx=\int \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}dx$

$f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}+C$（$C$ は積分定数）

ここで，$f(x)-e^{-x}=\int_0^x \sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt$ に $x=0$ を代入すると，

$f(0)-e^0=\int_0^0 \sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt=0$

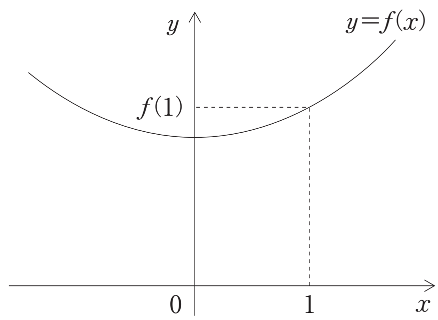
$f(0)=1$

$f(0)=\dfrac{e^0+e^{-0}}{2}+C$

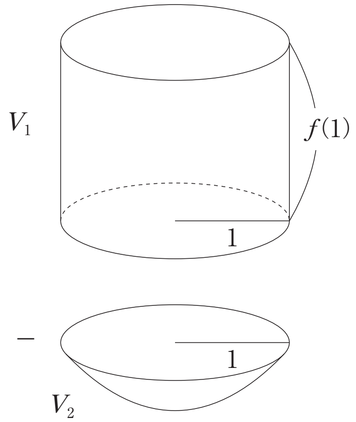
$=1+C=1$

$\therefore\quad C=0$

したがって，$f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ である。



求める体積は，半径 1 高さ $f(1)$ の円筒の体積 V_1 から $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ と $y=1$ で囲まれた部分を回転した体積 V_2 を引いたものである。



$$V_1=\pi f(1)=\frac{\pi(e+e^{-1})}{2}$$

$$V_2=\pi\int_{f(0)}^{f(1)}x^2dy$$

$y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ より $dy=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}dx$

y	$f(0)\to f(1)$
x	$0\to\quad 1$

であるから

$$V_2=\pi\int_0^1 x^2\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1(x^2e^x-x^2e^{-x})dx$$

ここで，部分積分を繰り返すと

$$\int x^2e^xdx=\int x^2(e^x)'dx$$

$$=x^2e^x-\int 2xe^xdx$$

$$=x^2e^x-\int 2x(e^x)'dx$$

$$=x^2e^x-2xe^x+\int 2e^xdx$$

$$=x^2e^x-2xe^x+2e^x$$

$$\int x^2e^{-x}dx=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}$$

したがって，

$$V_2=\frac{\pi}{2}\Big[x^2e^x-2xe^x+2e^x-(-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x})\Big]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{2}\{(e-2e+2e+e^{-1}+2e^{-1}+2e^{-1})-(2+2)\}$$

$$=\frac{\pi}{2}(e+5e^{-1}-4)$$

したがって，

$$V=V_1-V_2$$

$$=\frac{\pi(e+e^{-1})}{2}-\frac{\pi(e+5e^{-1}-4)}{2}$$

$$=\frac{\pi(4-4e^{-1})}{2}$$

$$=2\pi(1-e^{-1})$$

来月号では，金沢医科大学の数学を攻略しますので，ご期待ください！

全12校の掲載予定は以下のとおりとなっております。

第73回／4 月号　東邦大学医学部
第74回／5 月号　東京女子医科大学
第75回／6 月号　金沢医科大学
第76回／7 月号　岩手医科大学医学部
第77回／8 月号　北里大学医学部
第78回／9・10月合併号　日本大学医学部
第79回／10月臨時増刊号　聖マリアンナ医科大学
第80回／11月号　愛知医科大学医学部
第81回／12月号　東京医科大学
第82回／1・2 月合併号　杏林大学医学部
第83回／3 月増刊号　東京慈恵会医科大学
第84回／3 月号　昭和大学医学部