東大螢雪会 医学部数学 攻略演習

マンツーマン指導で医歯薬学部に多くの合格者を輩出している「東大螢雪会」では，主要な私立大学医学部の予想問題を作成しています。このコーナーでは，「東大螢雪会」の作成した予想問題を用いて，主要な私立大学医学部の数学を攻略するための演習を行います。毎号１校分の演習を行い，全12校の連載となる予定です。

今月号では，東邦大学医学部の数学を攻略します！

第73回　東邦大学医学部 編

東大螢雪会講師　小池　淳

東邦大学医学部の数学は，制限時間90分で小問15題の出題がされます。基本的な問題が中心ですが，やや面倒な問題が出題されることもあります。７割から８割の正解が望まれます。本予想問題でも８割の得点率，12題の正解を目指して下さい。

1　n を自然数として $N=n(n+1)(n+2)(n+3)$ とおく。すべての N を割り切る最大の整数は $\boxed{\text{アイ}}$ である。

2　全体集合 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ とし，集合 $A=\{1,2,3,9\}$，$B=\{2,4,6,8,10\}$ とする。このとき，集合 $(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$ の要素の個数は $\boxed{\text{ウ}}$ 個である。

3　x を実数とするとき，$\boxed{\text{エ}}\leqq\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x+1}\leqq\boxed{\text{オ}}$ である。

4　O を原点とする xy 平面において，直線 $y=1$ 上を動く点 $\mathrm{P}(t,1)$ と x 軸上の点 $\mathrm{A}(1,0)$ のつくる角 $\angle\mathrm{OPA}$ の大きさを θ とする。$\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ となるとき，$t=-\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キ}}$ である。

5　$|x|+2|y|+5|z|=18$，$xyz>0$ をみたす整数 x,y,z の組は全部で $\boxed{\text{クケ}}$ 組みである。

6　さいころを２回投げ，出た目を順に a,b とする。$4a+3b$ が３の倍数となったとき $b=3$ である確率は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

7　関数 $y=|2x^2-12x+13|$ のグラフと直線 $y=x+k$ が３個以上の交点をもつような定数 k の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。

$\boxed{8}$ 座標空間内に2点A$(1, 0, 1)$，B$(0, 1, 1)$のがある。平面$z=0$上の円$x^2+y^2=1$を点Pが動くとき，三角形ABPの面積の最小値は$\dfrac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}$である。

$\boxed{9}$ n, kを自然数すると$1-x+\sum_{k=1}^{n}(x^{3k}-x^{3k+1})=\dfrac{\boxed{チ}x^{3n+3}+\boxed{ツ}}{x^2+x+1}$である。

$\boxed{10}$ 関数$y=x^2$の区間$[0, 1]$をn等分し，4頂点$\left(\dfrac{k-1}{k}, 0\right)$, $\left(\dfrac{k}{n}, 0\right)$, $\left(\dfrac{k}{n}, \dfrac{k^2}{n^2}\right)$, $\left(\dfrac{k-1}{n}, \dfrac{k^2}{n^2}\right)$をもつ$n$個の長方形を考え，その面積の総和を$S_n$とする。$\lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}$である。

$\boxed{11}$ 極限$\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax-12}{\sqrt{x-1}-1}$が有限の値に収束するとき極限値は$\boxed{ナニ}$である。

$\boxed{12}$ 複素数平面上に2点A$(-3+2i)$，B$(1-i)$がある。点C$(x+6i)$が$\angle$CBA$=90^\circ$をみたす点であるとき，実数$x=\dfrac{\boxed{ヌネ}}{\boxed{ノ}}$である。

$\boxed{13}$ $f(x)=x^2+x+2$，$g(x)=x-1$がある。$F(x)=f(g(x))+f(x)-|f(g(x))-f(x)|$とするとき，$\lim_{h\to 0}\dfrac{F(1+h)-F(1)}{h}=\boxed{ハ}$である。

$\boxed{14}$ $x<1$のとき，関数$f(x)=x+\dfrac{1}{x-1}$は$x=\boxed{ヒ}$のとき最大値$\boxed{フヘ}$をとる。

$\boxed{15}$ $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n\,dx$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$とおく。$I_5=\dfrac{\boxed{ホ}}{\boxed{マミ}}$である。

$\boxed{1}$

解　説

題意をつかみ難いかもしれませんが，連続する整数の性質を聞く問題です。

連続3整数の積なら6の倍数，連続4整数の積なら24の倍数となるのは常識でしょう。

解　答

$N=n(n+1)(n+2)(n+3)$は連続する4整数の積であるから，4で割った余りが0，1，2，3である数が一つずつある。

よって，$1\times2\times3\times4=24$で割り切れる。

$\boxed{2}$

解　説

集合の要素が具体的にわかっていて，個数も少ないので，書き出すのがよいでしょう。

解　答

$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$，$A=\{1, 2, 3, 9\}$，

$B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$であるから，

$\overline{A}=\{4, 5, 6, 7, 8, 10\}$，$\overline{B}=\{1, 3, 5, 7, 9\}$である。

よって，$A\cap\overline{B}=\{1, 3, 9\}\overline{A}\cap B=\{4, 6, 8, 10\}$であるから，$(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$の要素の個数は7個である。

$\boxed{3}$

解　説

$\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x+1}$ の最大・最小を求めることが目標です。

最大最小を考える方法としては,

① $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x+1}=k$ とおいて，x の 2 次方程式を作り実数解を持つための条件から最大・最小を求める。

② $y=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x+1}$ とおいてグラフの概形を描いて最大・最小を求める。

③相加相乗平均を用いる。

が思いつきやすい方法でしょう。

③の相加相乗平均の場合は x が正という条件が付きます。負の場合は使えないのでしょうか。別解ではこの方法を使いました。

解　答

$\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x+1}=k$ とおく，分母が

$x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ より正であるから,

分母を両辺にかけて整理すると,

$x^2+2x+1=k(x^2-x+1)$

$(k-1)x^2-(k+2)x+k-1=0$

x の方程式がえられる。

$k=1$ のとき方程式は

$3x=0$

となり実数解をもつ。

$k\neq1$ のとき 2 次方程式となり，実数解をもつためには，判別式 D を用いて

$D=(k+2)^2-4(k-1)(k-1)\geqq0$

が必要十分条件である。

$(k+2)^2-4(k-1)(k-1)=-3k^2+12k$

$=-3k(k-4)\geqq0$

$\therefore\ 0\leqq k\leqq4$ ただし $k\neq1$

2 つの条件を合わせて

$0\leqq k\leqq4$

以上より $0\leqq\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x+1}\leqq4$ である。

(別解)

$\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x+1}=1+\dfrac{3x}{x^2-x+1}$

ここで $\dfrac{3x}{x^2-x+1}=\dfrac{3}{x-1+\dfrac{1}{x}}$ である。

$x>0$ のとき，相加相乗平均より

$x+\dfrac{1}{x}-1\geqq2\sqrt{x\dfrac{1}{x}}-1=1$　等号は $x=1$ のとき成立する。

したがって,

$\dfrac{3}{x+\dfrac{1}{x}-1}\leqq\dfrac{1}{3}$ であるから,

$\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x+1}=1+\dfrac{3x}{x^2-x+1}\leqq1+3=4$

である。

$x<0$ のとき，$x=-t$ とおくと,

$\dfrac{3}{x-1+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{3}{-t-1-\dfrac{1}{t}}=-\dfrac{3}{t+\dfrac{1}{t}+1}$

となり，$t>0$ より相加相乗平均が使えて

$t+\dfrac{1}{t}+1\geqq2\sqrt{t\dfrac{1}{t}}+1=3$　等号は $t=1$ のとき成立する。

したがって,

$\dfrac{3}{t+\dfrac{1}{t}+1}\leqq\dfrac{3}{3}=1$ であるから

$\dfrac{3}{x-1+\dfrac{1}{x}}=-\dfrac{3}{t+\dfrac{1}{t}+1}\geqq-1$ となり,

$\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x+1}=1+\dfrac{3x}{x^2-x+1}\geqq1-1=0$

である。

$x=0$ のとき

$\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x+1}=1$ である。

以上より $0\leqq\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x+1}\leqq4$ である。

4

解　説

角度を求めるためには，直線の傾きから $\tan\theta$ を求めるか，余弦定理か内積を使い $\cos\theta$ の値を求める方法が考えられます。本問では $\cos\theta$ を求められているので，余弦定理か内積を使うことになるでしょう。

解答では $\cos^2\theta$ を求めることで，$PO\cdot PA$ を直接求めないという技巧的な方法を使いました。

解　答

余弦定理より

$$\cos\theta=\frac{PO^2+PA^2-OA^2}{2PO\cdot PA}$$

$$=\frac{t^2+1+(t-1)^2+1+1}{2PO\cdot PA}$$

$$=\frac{2t^2-2t+2}{2PO\cdot PA}$$

$$=\frac{2t^2-2t+2}{2PO\cdot PA}$$

ここで，三角形 OAP の面積を考えると

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}PO\cdot PA\sin\theta$$

$$PO\cdot PA=\frac{1}{\sin\theta}$$

したがって，

$\cos\theta=(t^2-t+1)\sin\theta$

$\cos^2\theta=(t^2-t+1)^2\sin^2\theta$

$=(t^2-t+1)^2(1-\cos^2\theta)$

$\cos^2\theta=\dfrac{(t^2-t+1)^2}{1+(t^2-t+1)^2}$ である。

$\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ より

$\cos^2\theta=\dfrac{(t^2-t+1)^2}{1+(t^2-t+1)^2}=\dfrac{9}{10}$

$10(t^2-t+1)^2=9\{1+(t^2-t+1)^2\}$

$(t^2-t+1)^2=9$

$(t^2-t+1)=3$

$t^2-t-2=0$

$t=-1, 2$

である。

5

解　説

整数問題で因数分解等できないときは条件を絞っていきます。本問では，係数の一番大きい z について絞りましょう。

解　答

$xyz>0$ より $|x|\geqq1$，$|y|\geqq1$，$|z|\geqq1$ であり

$|x|+2|y|+5|z|=18>5|z|$ であるから，

$1\leqq|z|\leqq3$ となる。

① $|z|=1$ のとき

$|x|+2|y|=13\geqq1+2|y|$ より

$1\leqq|y|\leqq6$

$|y|$ の値で $|x|$ の値が一意に定まるから，

$(|x|, |y|, |z|)$ の組は 6 組ある。

② $|z|=2$ のとき

$|x|+2|y|=8\geqq1+2|y|$ より

$1\leqq|y|\leqq3$

$(|x|, |y|, |z|)$ の組は 3 組ある。

③ $|z|=3$ のとき

$|x|+2|y|=3\geqq1+2|y|$ より

$|y|=1$

$(|x|, |y|, |z|)$ の組は 1 組ある。

以上より $(|x|, |y|, |z|)$ の組は10組あり，符号の組み合わせは 4 通りあるから，整数 x, y, z の組は40組ある。

6

解　説

さいころを 2 回投げ，出た目による $4a+3b$ を考えます。整数問題として考えていくこともできますが，たかだか36通りなので，すべて書き出してしまうほうが簡単でしょう。その際ミスを減らすためには表の形で書き出すとよいでしょう。

条件を絞るときは，

$4a+3b=3k$

$4a=3(k-b)$

3 と 4 は互いに素であるから，a は 3 の倍数である。$a=3l$ とおくと，

$4a+3b=3\cdot4l+3b=3(4l+b)$

となり，b の値にかかわらず 3 の倍数となる。

$4a+3b$ が 3 の倍数となるのは12通りと考えることになります。

解　答

b＼a	1	2	3	4	5	6
1	7	10	13	16	19	22
2	11	14	17	20	23	26
3	**15**	**18**	**21**	**24**	**27**	**30**
4	19	22	25	28	31	34
5	23	26	29	32	35	38
6	**27**	**30**	**33**	**36**	**39**	**42**

上の表の太字の数を数えると3の倍数となるのは12通りである。このうち $b=3$ であるのは1通りである。

したがって，求める条件付確率は

$\frac{1}{12}$ である。

7

解　説

計算だけで求めるのは場合分けが大変です。グラフを描いて簡単に求めましょう。

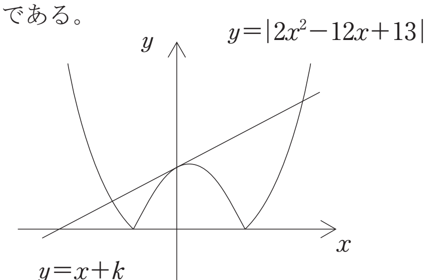
解　答

グラフより，直線 $y=x+k$ が $y=|2x^2-12x+13|$ のグラフと交点を3つ以上もつような範囲で，k が最大になるのは $y=x+k$ と $y=-(2x^2-12x+13)$ が接するときである。

連立して $x+k=-(2x^2-12x+13)$ が重解をもつ条件より

$11^2-4\cdot2(13+k)=0$

$\therefore k=\frac{17}{8}$ である。



8

解　説

空間図形ではベクトルを利用するのが良いでしょう。ベクトルを使った面積の公式

$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$ はぜひ覚えておきましょう。

また，ベクトルの成分を計算するために点Pの座標が必要となります。円だけでなく2次曲線上の点の媒介変数表示はしっかり覚え使えるようにしましょう。

解　答

円上の点Pは $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ とおけるから，

$\overrightarrow{AB}=(-1, 1, 0)$，$\overrightarrow{AP}=(\cos\theta-1, \sin\theta, -1)$ となる。

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=-\cos\theta+1+\sin\theta$

$|\overrightarrow{AB}|^2=1+1=2$

$|\overrightarrow{AP}|^2=(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta+1=3-2\cos\theta$

三角形ABPの面積は

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AP}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP})^2}$$

である。

$|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AP}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP})^2$

$=2(3-2\cos\theta)-(1-\cos\theta+\sin\theta)^2$

$=4-2\cos\theta-2\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta$

ここで，$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=t$ とおくと，

$2\sin\theta\cos\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^2-1=t^2-1$ であるから，

$|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AP}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP})^2=4-2t+t^2-1$

$=t^2-2t+3$

$=(t-1)^2+2\geqq2$

$S\geqq\frac{\sqrt{2}}{2}$ である。

9

解　説

計算するだけの問題です。このような問題は必ず取りましょう。

解　答

$$1-x+\sum_{k=1}^{n}(x^{3k}-x^{3k+1})=1-x+\frac{x^3(1-x)(1-x^{3n})}{1-x^3}$$

$$=1-x+\frac{x^3(1-x^{3n})}{x^2+x+1}$$

$$=\frac{x^2+x+1-x^3-x^2-x+x^3-x^{3n+3}}{x^2+x+1}$$

$$=\frac{-x^{3n+3}+1}{x^2+x+1}$$

10

解　説

問題文の図形的意味を考えましょう。結局は面積を求めるだけの問題です。

S_n の式を求めてもできますが，意味が分かれば暗算の問題です。

長方形の面積 S_n を求める場合は

1 個の長方形は高さ $\left(\dfrac{k}{n}\right)^2$，幅 $\dfrac{1}{n}$ であるから面積は $\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^2$

この総和は

$$S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2$$

$$=\frac{1}{n^3}\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{2n^2+3n+1}{6n^2}$$

となります。

解　答

関数 $y=x^2$ のグラフと x 軸で囲まれた面積を求めればよいから，

$\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$ である。

11

解　説

不定形を処理するだけの典型問題です。

解　答

$\displaystyle\lim_{x\to2}\sqrt{x-1}-1=0$ であるから，収束するためには

$\displaystyle\lim_{x\to2}(x^2+ax-12)=0$ となることが必要である。

したがって，$a=4$ である。

このとき

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+4x-12}{\sqrt{x-1}-1}=\lim_{x\to2}\frac{(x^2+4x-12)(\sqrt{x-1}+1)}{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+6)(\sqrt{x-1}+1)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}(x+6)(\sqrt{x-1}+1)$$

$$=16$$

となり，確かに収束し極限値16となる。

12

解　説

新課程で導入された複素数平面は昨年度入試から出題が増えています。本年度入試ではさらに出題が増えるでしょう。ド・モアブルの定理，回転移動をしっかり理解しましょう。ただ，本問では垂直条件を用いても解けます。どうしても複素数平面の考え方でできない場合は他分野の考え方で解けるようにしましょう。

解　答

点 C$(x+6i)$ の虚部が正の値であるから，BC と BA のなす角は-90°である。

$$(x+6i)-(1-i)=k\{(-3+2i)-(1-i)\}(-i)$$

$$x-1+7i=k(4i+1)$$

実部，虚部を比較して

$$x-1=k$$

$$7=4k$$

$$k=\frac{7}{4}$$

$x=\dfrac{7}{4}+1=\dfrac{11}{4}$である。

13

解　説

合成関数，絶対値と処理が大変なものが入っています。ただ，関数自体は 1 次関数，2 次関数で扱いやすいので，まず合成を処理しそのあとで絶対値を処理していきましょう。

解　答

$f(x)=x^2+x+2$，$g(x)=x-1$ より

$$f(g(x))=(x-1)^2+(x-1)+2$$

$$=x^2-x+2$$

したがって，

$$f(g(x))+f(x)=x^2-x+2+x^2+x+2$$

$$=2x^2+4$$

$$f(g(x))-f(x)=x^2-x+2-(x^2+x+2)$$

$$=-2x$$

より

$$F(x)=2x^2+4-2|x|$$

よって，

$$F(x)=\begin{cases}2x^2+4-2x\ (x\geqq0)\\ 2x^2+4+2x\ (x<0)\end{cases}$$

ここで，

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}=F'(1)$$

であるから，$x \geqq 0$ のときを考えて

$F'(x)=(2x^2-2x+4)'$

$=4x-2$

$F'(1)=2$ である。

$\boxed{14}$

解　説

微分してグラフを描けばできます。手早く計算しましょう。ただ，実はこの問題も相加相乗平均で解けます。確かめてみてください。

解　答

$$f'(x)=1+\frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{\{(x-1)+1\}\{(x-1)-1\}}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

増減表は

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-1	↗		↗	3	↘

したがって，$x<1$ の範囲で $x=0$ のとき最大値-1 をとる。

$\boxed{15}$

解　説

I_5 というところが微妙です。I_{10} となると，漸化式を作るしかないでしょうが，I_5 だったら，5 倍角と考えるかもしれません。ただ，解く時間を計算しやすいのは漸化式でしょうから，4 倍角以上であれば漸化式を使うべきです。

解　答

$$\int \sin^n x dx=\int \sin^{n-1} x(-\cos x)'dx$$

$$=-\sin^{n-1} x\cos x-\int (n-1)\sin^{n-2} x\cos x(-\cos x)dx$$

$$=-\sin^{n-1} x\cos x+\int (n-1)\sin^{n-2} x\cos^2 xdx$$

$$=-\sin^{n-1} x\cos x+\int (n-1)(\sin^{n-2} x-\sin^n x)dx$$

したがって，

$$I_n=\left[-\sin^{n-1} x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)(I_{n-2}-I_n)$$

$$nI_n=(n-1)I_{n-2}$$

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

ここで，

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

であるから，

$$I_5=\frac{4}{5}I_3=\frac{4}{5}\frac{2}{3}I_1=\frac{8}{15}$$

である。

　来月号では，東京女子医科大学の数学を攻略しますので，ご期待ください！

　全12校の掲載予定は以下のとおりとなっております。

第73回／４月号　東邦大学医学部
第74回／５月号　東京女子医科大学
第75回／６月号　金沢医科大学
第76回／７月号　岩手医科大学医学部
第77回／８月号　北里大学医学部
第78回／９・10月合併号　日本大学医学部
第79回／10月臨時増刊号　聖マリアンナ医科大学
第80回／11月号　愛知医科大学医学部
第81回／12月号　東京医科大学
第82回／１・２月合併号　杏林大学医学部
第83回／３月増刊号　東京慈恵会医科大学
第84回／３月号　昭和大学医学部