

東大螢雪会 **医 学 部 数 学** 攻略演習

マンツーマン指導で医歯薬学部にも多くの合格者を輩出している「東大螢雪会」では、主要な私立大学医学部の予想問題を作成しています。このコーナーでは、「東大螢雪会」の作成した予想問題を用いて、主要な私立大学医学部の数学を攻略するための演習を行います。毎号1校分の演習を行い、全12校の連載となる予定です。

今月号では、昭和大学医学部の数学を攻略します！

第72回 昭和大学医学部 編

東大螢雪会講師 小池 淳

昭和大学医学部の数学は、英語と合わせて制限時間140分で小問集合2題、大問2題が出題されます。標準的な問題ですが、論述問題もあり、うまく解答しないと時間切れになります。小問集合は以前に比べると難易度も上がっているため手ごわい出題です。今回の予想問題では7割程度の得点率を目指して下さい。

① 次の各問に答えよ。ただし、答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) S大学の1年生のうち、インフルエンザにかかった学生の割合は、予防接種を受けた場合は $\frac{1}{15}$ 、

受けなかった場合は $\frac{1}{4}$ であった。また、予防接種を受けた人の割合は $\frac{7}{10}$ であった。

(1-1) S大学の1年生がインフルエンザにかかった確率を求めよ。

(1-2) インフルエンザにかかった人を選んだとき、その人が予防接種を受けていた確率を求めよ。

(2) 横の長さが1219、縦の長さが69の長方形の内部に長さが整数となる正方形を敷きつめる。

(2-1) 敷きつめることのできる正方形のうち最大となる正方形の1辺の長さを求めよ。

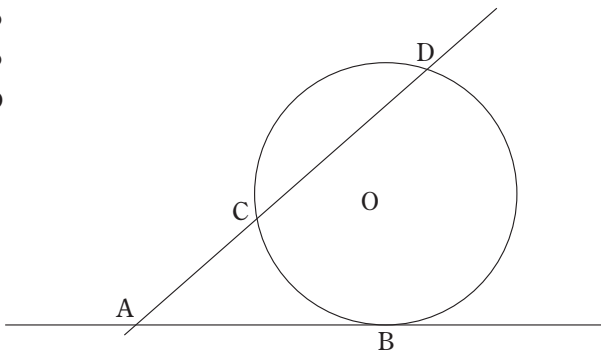
(2-2) $1220x + 69y = 2$ をみたす整数 x, y を求めよ。

(3) 10人の学生にあるテストを行った結果が次のようになった。

7, 8, 4, 6, 6, 5, 2, 3, 9, 10

このデータの分散を求めよ。

(4) 円Oの外部にある点Aから引いた接線の接点をB、点Aから引いた直線と円Oとの交点をC, Dとする。AB=6, AC=3, BD=10のときBCの長さを求めよ。



2 空間内に点 $O(0,0,0)$, $A(-1,1,0)$, $B(1,0,0)$, $C(0,1,1)$, $D(0,1,0)$ がある。

また、直線 OA 上に点 H を $OA \perp CH$ となるようにとり、 $\angle CHD = \theta$ とおく。次の各問に答えよ。ただし、(1), (2)は結果のみを解答欄に記入せよ

- (1) 点 H の座標を求めよ。
- (2) $\cos \theta$ の値を求めよ。
- (3) 直線 OA と直線 BC の距離の最小値を求めよ。また、そのときの点の座標を求めよ。

3 次の各問に答えよ。ただし、答は結果のみを解答欄に記入せよ。

- (1) $2x^2 + 5xy + 2y^2 - 4x + 4y - 16 = 0$ をみたす図形と接する円の中心が描く軌跡の方程式を求めよ。
- (2) $x > 2$ のとき $\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$ の最小値を求めよ。
- (3) $k > 0$ として、 $4x^2 + 2(1 - k)x - k = 0$ の解が $\sin \theta$, $\cos \theta$ となるとき、 θ の値を求めよ。ただし、 $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。
- (4) 2つの複素数 z, w があり、 $|z - 1| = 1$, $w = (1 + i)z$ をみたしている。 w が複素数平面上に描く図形の内部の面積を求めよ。

4 自然数 n に対して、方程式 $\frac{\log x}{x} = \frac{1}{3n}$ ($x > 0$) を考える。次の各問に答えよ。ただし、(1), (2)は

結果のみを解答欄に記入せよ。なお、必要があれば、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ であること、 $e < 3$ であることを使ってよい。

- (1) 方程式 $\frac{\log x}{x} = \frac{1}{3n}$ ($x > 0$) の解の個数を求めよ。
- (2) 方程式 $\frac{\log x}{x} = \frac{1}{3n}$ の最小の解を a_n とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ の値を求めよ。

1

解説

- (1) 条件付確率は表にすると全体像が見えて考えやすくなります。

本問では

	インフルエンザにかかった	かからない	合計
予防接種を受けた	$\frac{1}{15} \times P(B)$	$\frac{14}{15} \times P(B)$	$P(B) = \frac{7}{10}$
受けない	$\frac{1}{4} \times P(\bar{B})$	$\frac{3}{4} \times P(\bar{B})$	$P(\bar{B}) = \frac{3}{10}$
合計	$P(A)$	$P(\bar{A})$	

(1-1)では、 $P(A)$ を求めるので、 $\frac{1}{15} \times P(B) +$

$\frac{1}{4} \times P(\bar{B})$ とわかります。

(1-2)では、インフルエンザにかかったという条件

の下での予防接種を受けた確率ですから、 $\frac{1}{15} \times P(B)$ を $P(A)$ で割ればよいことがわかります。

(2)

(2-1)の題意は1219と69の最大公約数を求めることです。

1219と69の最大公約数を求めるためにはユークリッドの互除法を用いますが、本問はこの図形的な理解をするための問題です。

①短い辺69の長さの正方形を長方形内にできるだけ敷きつめる。

②残った長方形の短い辺（本問では46）の長さの正方形を残った長方形内にできるだけ敷きつめる。

③もとの長方形がすべて敷きつめられるまで②を繰り返す。

この手続きがユークリッドの互除法そのものです。ユークリッドの互除法を苦手としている方は、ぜひ図形的に理解してみましょう。

(2-2)では(2-1)を利用して不定方程式 $1220x+69y=2$ を解くことですが、まず、 $1220x+69y=1$ を考えることになります。

(3) データの分析では、用語、それぞれの計算方法をしっかり身につけておけば大丈夫です。

分散は（平均との差の2乗）の平均 または2乗の平均—平均の2乗で求めます。

表をうまく使うとミスなく計算することができますでしょう。

(4) 初等幾何の問題です。とにかく相似を探しましょう。円が関係する場合は、円周角の定理、接弦定理に気を付けてみていきましょう。

解 答

(1) インフルエンザにかかったという事象を A、予防接種を受けたという事象を B とする。

問題の条件より

$$P(B) = \frac{7}{10}$$

$$P_B(A) = \frac{1}{15}$$

$$P_{\bar{B}}(A) = \frac{1}{4}$$

である。

全事象の確率を考えると

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = \frac{3}{10}$$

である。

(1-1)

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \\ &= P(B)P_B(A) + P(\bar{B})P_{\bar{B}}(A) \\ &= \frac{7}{10} \times \frac{1}{15} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{28+45}{600} \end{aligned}$$

$$= \frac{73}{600}$$

(1-2)

$$\begin{aligned} P_A(B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{P(B)P_B(A)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{7}{10} \times \frac{1}{15}}{\frac{73}{600}} \\ &= \frac{7 \times 600}{73 \times 10 \times 15} \\ &= \frac{28}{73} \end{aligned}$$

(2)

(2-1) 1辺69の長さの正方形を長方形内にできるだけ敷きつめると、

$$1219 = 69 \times 17 + 46$$

となり、横の長さ46、縦の長さ69の長方形が残る。

1辺46の長さの正方形を残った長方形内にできるだけ敷きつめると、

$$69 = 46 \times 1 + 23$$

となり、横の長さ46、縦の長さ23の長方形が残る。

1辺23の長さの正方形を残った長方形内にできるだけ敷きつめると、

$$46 = 23 \times 2$$

となるので、1辺23の長さの正方形で敷きつめることができる。

(2-2) $1220x+69y=1$ を考える。

1220と69に互除法の計算をすると、

$$1220 = 69 \times 17 + 47 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$69 = 47 \times 1 + 22 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$47 = 22 \times 2 + 3 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$22 = 3 \times 7 + 1 \quad \dots \textcircled{4}$$

で1220と69は互いに素であるので解を持つことがわかる。

④式から

$$\begin{aligned} 1 &= 22 - 3 \times 7 \\ &= 22 - (47 - 22 \times 2) \cdot 7 \\ &= 22 \times 15 + 47 \times (-7) \\ &= (69 - 47 \times 1) \cdot 15 + 47 \times (-7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 69 \times 15 + 47 \times (-22) \\ &= 69 \times 15 + (1220 - 69 \times 17) \times (-22) \\ &= 69 \times (389) + 1220 \times (-22) \end{aligned}$$

したがって、 $1220(-22) + 69(389) = 1$ である。

両辺に 2 をかけると

$$1220(-22) \times 2 + 69(389) \times 2 = 1 \times 2$$

$$1220(-44) + 69(778) = 2$$

$$\therefore 1220(x+44) + 69(y-778) = 0$$

求める整数は $x = -44 + 69k$, $y = 778 + 1220k$

(k は整数)

(3)

x	7	8	4	6	6	5	2	3	9	10	60
$x - \bar{x}$	1	2	-2	0	0	-1	-4	-3	3	4	0
$(x - \bar{x})^2$	1	4	4	0	0	1	16	9	9	16	60

上の表より分散は 6

(4) 接弦定理より $\angle ABC = \angle ADB$ であり、
 $\angle BAC = \angle CAB$ が共通角であるから三角形
 ABC と三角形 ADB は相似である。

$$BC : DB = AC : AB \text{ より } BC = 5$$

2

解説

ベクトルで考えることになるでしょう。(1), (2) についてはただ計算するだけです。

(3) はねじれの関係にある直線間の距離の最小値を求める問題です。計算だけでも解けますが、図形的に考えたほうが計算が簡単になります。2直線に垂直に交わる直線を考えましょう。そのためには直線 OA , BC の法線ベクトルを求める必要があります。

解答

(1) 点 H は直線 OA 上の点であるから

$$\vec{OH} = k\vec{OA} = (-k, k, 0) \text{ とおけるから}$$

$$\vec{CH} = -\vec{OC} + k\vec{OA} = (-k, k-1, -1)$$

$$\vec{OA} \perp \vec{CH} \text{ より } \vec{OA} \cdot \vec{CH} = 0$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{CH} = (-1, 1, 0) \cdot (-k, k-1, -1)$$

$$= k + k - 1 = 0$$

$$\therefore k = \frac{1}{2}$$

よって、 $H\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$

$$(2) \vec{HC} = -\vec{CH} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

$$\vec{HD} = (0, 1, 0) - \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

$$|\vec{HC}| = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad |\vec{HD}| = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{HC} \cdot \vec{HD} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{2}$$

したがって、

$$\cos \theta = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(3) $\vec{OA} = (-1, 1, 0)$, $\vec{BC} = (-1, 1, 1)$ に垂直なベクトルの一つを $\vec{n} = (a, b, c)$ とおくと

$$-a + b = 0$$

$$-a + b + c = 0$$

より $\vec{n} = (1, 1, 0)$ とできる。

点 P を $(-p, p, 0)$ とおくと、点 Q は $(l-p, l+p, 0)$ とおける。

点 Q は直線 BC 上にあり、 z 座標が 0 の点だから点 B に一致することがわかる。

したがって、 $l-p=1$, $l+p=1$ をみたすから

$$l = \frac{1}{2}, \quad p = 0 \text{ であり、点 } P\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right),$$

$Q(1, 0, 0)$ であり、距離は $\sqrt{\frac{1}{2}}$ である。

3

解説

(1) まずは、 $2x^2 + 5xy + 2y^2 - 4x + 4y - 16 = 0$ が因数分解できるかどうか確認しましょう。

できなければ、長軸、短軸が座標軸に平行でない楕円を考えますが、その場合は誘導がつかはずですから、必ず因数分解できると信じて計算しましょう。

図形が直線であることがわかれば中心の軌跡は 2 直線のなす角の二等分線であることに気づくでしょう。角の二等分線は単位ベクトル、点と直線の距離を使って求めるとよいでしょう。

(2) 分式式では分母の次数 > 分子の次数とすることが基本です。その後、相加相乗平均に気づ

(90)

くと簡単に解けるでしょう。

そのままの形で考えて微分すると大変な計算をすることにになります。

(3) 解と係数の関係を用いて2解の二乗の和が1になることを条件としてもよいでしょう。

ここでは、因数分解して解と直接求めてみます。

(4) 複素数 z の描く図形を求めるときには、 $z = x + yi$ において成分計算する方法、式の意味から見破る方法があります。

できれば成分計算しないで解けるようにしましょう。

その際基本となるのは、 $|z - a| = r (r > 0)$ は中心 a 、半径 r の円を示します。

この形になるように計算しますが、その際には複素数の大きさの計算方法 $|z|^2 = z\bar{z}$ を用います。ベクトル同様成分計算しないで解けるよう練習しましょう。

解答

(1) $2x^2 + 5xy + 2y^2 - 4x + 4y - 16 = 0$ を x の降べきに整理して因数分解すると

$$\begin{aligned} & 2x^2 + (5y - 4)x + 2y^2 + 4y - 16 \\ &= 2x^2 + (5y - 4)x + 2(y^2 + 2y - 8) \\ &= 2x^2 + (5y - 4)x + 2(y - 2)(y + 4) \\ &= (2x + y + 4)(x + 2y - 4) \end{aligned}$$

したがって、直線 $2x + y + 4 = 0$, $x + 2y - 4 = 0$ が本問の図形である。

2直線に接する円の中心は2直線の角の二等分線である。

2直線の交点は $(-4, 4)$ である。

x 軸上で2直線との距離が等しい点 $(a, 0)$ を考えると、点と直線の距離より

$$\begin{aligned} \frac{|2a + 4|}{\sqrt{5}} &= \frac{|a - 4|}{\sqrt{5}} \\ 2a + 4 &= \pm(a - 4) \\ a &= -8, 0 \end{aligned}$$

したがって、求める軌跡の方程式は $y = -x$, $y = x + 8$ である。

(2)

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2} &= x + \frac{1}{x - 2} \\ &= x - 2 + \frac{1}{x - 2} + 2 \end{aligned}$$

ここで $x > 2$ より $x - 2 > 0$ 、相加相乗平均の関係より

$$x - 2 + \frac{1}{x - 2} \geq 2\sqrt{(x - 2)\frac{1}{x - 2}} = 2$$

したがって、最小値は4

(3)

$$\begin{aligned} 4x^2 + 2(1 - k)x - k &= 4x^2 + 2x - k(2x + 1) \\ &= (2x - k)(2x + 1) \end{aligned}$$

したがって、2解は $x = \frac{k}{2}$, $-\frac{1}{2}$ である。

2解が $\sin \theta$, $\cos \theta$ となるとき

$$\left(\frac{k}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

$$\frac{k^2 + 1}{4} = 1$$

$$k^2 = 3$$

$$k = \sqrt{3}$$

$$(k > 0)$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \theta = -\frac{1}{2} \text{ または } \sin \theta = -\frac{1}{2},$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ である。}$$

したがって、 $\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}$ となる。

(4)

$w = (1 + i)z$ より

$$\begin{aligned} z &= \frac{w}{1 + i} \\ &= \frac{w(1 - i)}{2} \end{aligned}$$

$|z - 1| = 1$ に代入して

$$\left| \frac{w(1 - i)}{2} - 1 \right| = 1$$

$$\left(\frac{w(1 - i)}{2} - 1 \right) \left(\frac{\overline{w(1 - i)}}{2} - 1 \right) = 1$$

$$(w(1 - i) - 2)(\overline{w}(1 + i) - 2) = 4$$

$$w\overline{w}(1 - i^2) - 2w(1 - i) - 2\overline{w}(1 + i) = 0$$

$$w\overline{w} - w(1 - i) - \overline{w}(1 + i) = 0$$

$$(w - 1 - i)(\overline{w} - 1 + i) - (1 - i)(1 + i) = 0$$

$$(w - 1 - i)(\overline{w} - 1 + i) = 2$$

$$(w - 1 - i)(\overline{w - 1 - i}) = 2$$

$$|w - 1 - i| = \sqrt{2}$$

w は中心 $1+i$, 半径 $\sqrt{2}$ の辺を描くから面積は 2π

4

解説

本問の方程式は解けないので, グラフを描いて考察することになります。

極限は, a_n の一般項が求められないため, 直接極限値を計算できません。そこで, はさみうちの原理を使うことになります。

解答

(1) $f(x) = \frac{\log x}{x}$ とおく,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \log x}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

$\log x = 1$ のとき $f'(x) = 0$ となるから, $x = e$ のとき極値をとる。

増減表は

x	0	...	e	...	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	$1/e$	↘	0

極大値は $\frac{1}{e}$ となり, $\frac{1}{e} > \frac{1}{3} \geq \frac{1}{3n} > 0$ となるから,

$\frac{\log x}{x} = \frac{1}{3n}$ は解を 2 個持つ。

(2) 小さいほうの解は $1 < a_n < e$ の範囲に存在する。このとき, $f(x)$ は単調増加関数である。

$g(x) = \frac{\log x}{x} - \frac{1}{3n}$ とおくと

$g(1) = 0 - \frac{1}{3n}$

$g(e^{\frac{1}{n}}) = \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}} - \frac{1}{3n} = \frac{1}{ne^{\frac{1}{n}}} - \frac{1}{3n}$

ここで, $g(e^{\frac{1}{n}})$ の符号を調べるために $\frac{1}{ne^{\frac{1}{n}}}, \frac{1}{3n}$ の

大小を比較する。

$ne^{\frac{1}{n}}$ と $3n$ をそれぞれ n 乗して比較すると

$e < 3$ と 3^n となるから, $ne^{\frac{1}{n}} < 3n$ より $\frac{1}{ne^{\frac{1}{n}}} > \frac{1}{3n}$

したがって, $1 < a_n < e^{\frac{1}{n}}$ であり, $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1$ であるから,

はさみうちの原理より $\lim_{x \rightarrow \infty} a_n = 1$ である。

来月号では, 東邦大学医学部の数学を攻略しますので, ご期待ください!

全12校の掲載予定は以下のとおりとなっております。

- 第73回 / 4月号 東邦大学医学部
- 第74回 / 5月号 東京女子医科大学
- 第75回 / 6月号 金沢医科大学
- 第76回 / 7月号 岩手医科大学医学部
- 第77回 / 8月号 北里大学医学部
- 第78回 / 9・10月合併号 日本大学医学部
- 第79回 / 10月臨時増刊号 聖マリアンナ医科大学
- 第80回 / 11月号 愛知医科大学医学部
- 第81回 / 12月号 東京医科大学
- 第82回 / 1・2月合併号 杏林大学医学部
- 第83回 / 3月増刊号 東京慈恵会大学
- 第84回 / 3月号 昭和大学医学部

「東大螢雪会」では, 本誌をご覧の方々の学力アップのために, 主要な私立大学医学部の予想問題を無料でプレゼントしています。ご希望の方は,

「東大螢雪会」のホームページ (<http://www.keisetsukai.com>)

(PC・携帯) からお問い合わせください。

