東大螢雪会 医学部数学 攻略演習

マンツーマン指導で医歯薬学部に多くの合格者を輩出している「東大螢雪会」では，主要な私立大学医学部の予想問題を作成しています。このコーナーでは，「東大螢雪会」の作成した予想問題を用いて，主要な私立大学医学部の数学を攻略するための演習を行います。毎号１校分の演習を行い，全12校の連載となる予定です。

今月号では，東京慈恵会大学医学部の数学を攻略します！

第71回　東京慈恵会医科大学 編

東大螢雪会講師　小池　淳

東京慈恵会大学医学部の数学は，制限時間 90 分で大問 4 題の出題がされます。ほとんどの問題が答えのみですが，グラフの描画，証明等多岐にわたる解答方式があります。数学Ⅲからの出題が多く，特に立体の体積を求める問題は頻出しています。難易度が高く手ごわい出題です。今回の予想問題では 7 割程度の得点率を目指して下さい。

$\boxed{1}$

20 枚のカードから，もとに戻さずに 2 枚のカードを引くとき，2 枚目のカードが
5 の倍数となる確率は $\boxed{\text{（ア）}}$ である。また，2 枚目のカードが 5 の倍数であるとき，1 枚目のカードが
5 の倍数である確率は $\boxed{\text{（イ）}}$ である。

$\boxed{2}$

xyz空間に，連立不等式
$0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq 1,\ x^2+y^2+z^2+2xy-1 \geqq 0$
の表す立体Dがある。

(1)　立体Dを平面$z=t\,(0 \leqq t \leqq 1)$で切ったときの断面の概形をxy平面に図示せよ。

(2)　断面の面積$S(t)$を求めよ。

(3)　立体Dの体積を求めよ。

$\boxed{3}$

Oを原点とする複素数平面上の 2 点A，Bを表す複素数をそれぞれα，βとする。また，2 点P，Qを表す複素数をそれぞれz，wとする。

$|z-\alpha|=|z|$，$2|w-\beta|=|w|$が成り立っている。

(1)　点Pは点Oと点Aの $\boxed{\text{（ウ）}}$ 上にあり，点Qは $\boxed{\text{（エ）}}$ を中心とする円上にある。

(2)　$\alpha=-6+8i$，$\beta=4+3i$，$|z| \leqq 10$ を満たすとき，点Pの描く線分の長さは $\boxed{\text{（オ）}}$ であり，点Qが描く円の半径は $\boxed{\text{（カ）}}$ である。

(3)　(2)の条件の下で点Pと点Qの距離の最小値は $\boxed{\text{（キ）}}$ となる。

$\boxed{4}$

関数 $f(x)=\log(x\sqrt{x^2+1})$ を考える。

(1)　関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)=$ $\boxed{\text{(ク)}}$ であり，第 2 次導関数を $f''(x)$ とするとき，

$\boxed{\text{(ケ)}}$ $f(x)+xf'(x)=0$ が成り立つ。

(2)　任意の自然数 k について，$f'^{(k)}(x)$ は関数 $f'(x)$ の第 k 次導関数を表すとすると，

$\boxed{\text{(ケ)}}$ $f^{(n+1)}(x)+$ $\boxed{\text{(コ)}}$ $xf^{(n)}(x)+$ $\boxed{\text{(サ)}}$ $f^{(n-1)}(x)=0$ が成り立つことを示せ。

(2)　$f^{(9)}(x)$，$f^{(10)}(x)$ の値を求めよ。

$\boxed{1}$

解 説

条件付確率はあることが起こったことがわかっている場合に別の事象が起こっていた確率を求めるものです。いろいろな条件により結果が発生する場合に，どの条件が影響を及ぼしているのか検討するために使います。遺伝的要因，生活習慣等いろいろな条件により疾病が発生し，原因が特定できないことの多い医学の世界では非常に重要な概念となります。

本問は非常に単純な事象なので迷うことはないでしょう

解 答

2 枚目のカードが 5 の倍数となるのは

ア

1 枚目，2 枚目とも 5 の倍数のときで，この確率は

$$\frac{4}{20}=\frac{3}{19}=\frac{12}{380}$$

イ

1 枚目は 5 の倍数以外で，2 枚目が 5 の倍数のときで，この確率は

$$\frac{16}{20}=\frac{4}{19}=\frac{64}{380}$$

の 2 つの場合があり，ア，イは互いに排反である

ウ

2 枚目のカードが 5 の倍数となる確率はア+イで

$$\frac{12}{380}+\frac{64}{380}=\frac{76}{380}=\frac{1}{5}$$

　2 枚目のカードが 5 の倍数であるときに 1 枚目のカードも 5 の倍数であるという条件付き確率はア／ウであるから

$$\frac{\frac{12}{380}}{\frac{76}{380}}=\frac{12}{76}=\frac{3}{19}$$

$\boxed{2}$

解 説

立体の体積を求める場合はある平面で立体を切り，その断面積の面積積分することで求めていきます。一般に，どんな平面で切るかということが難しい問題です。慈恵医科大学では立体の体積は頻出分野なので，問題演習を通して慣れておきましょう。

本問では，平面 $z=t$ と指定されているので，解きやすいのではないでしょうか。

$z=t$ を代入して得られた 2 次式

$x^2-2xy+y^2\geqq 1-t^2$

がどんな図形か考察しますが，その際最初に考えることは因数分解ができるかどうかです。x^2，y^2 の項がありますが，xy の 2 次式なので，円，楕円を考えてはいけません。必ず，因数分解ができないかを考えましょう。因数分解できないとき初めてどんな図形かを考えましょう。

解 答

(1)　$x^2+y^2+z^2-2xy-1\geqq 0$ に $z=t(0\leqq t\leqq 1)$ を代入すると，

$x^2+y^2+t^2-2xy-1=x^2-2xy+y^2+t^2-1$

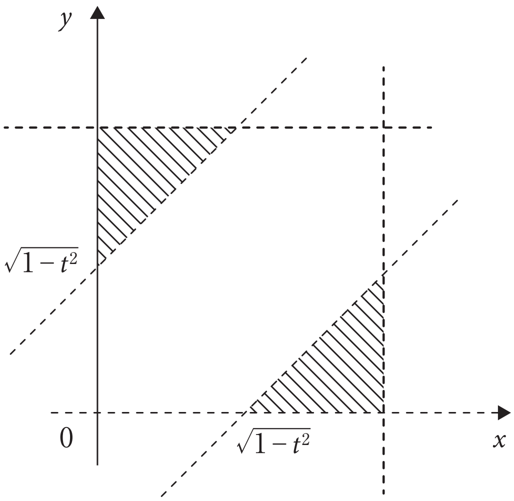
$x^2-2xy+y^2\geqq 1-t^2$

$(x-y)^2\geqq 1-t^2$

$x-y\leqq -\sqrt{1-t^2}$ または $\sqrt{1-t^2}\leqq x-y$

したがって，

求める概形は



$0 \leqq x \leqq 1$ かつ $0 \leqq y \leqq 1$
かつ
$x-y \leqq -\sqrt{1-t^2}$ または $\sqrt{1-t^2} \leqq x-y$
で上図のようになる。

(2) 直角をはさむ辺の長さが $1\sqrt{1-t^2}$ の直角二等辺三角形であるから，面積は

$$S(t)=2\times\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-t^2})^2$$
$$=1-2\sqrt{1-t^2}+1-t^2$$
$$=-t^2-2\sqrt{1-t^2}+2$$

となる。

(3) 立体Dの体積Vは

$$V=\int_0^1 S(t)\,dt$$
$$=\int_0^1(-t^2-2\sqrt{1-t^2}+2)\,dt$$
$$=\int_0^1(-t^2+2)\,dt-2\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt$$

ここで

$$=\int_0^1(-t^2+2)\,dt=\left[-\frac{1}{3}t^3+2t\right]_0^1$$
$$=-\frac{1}{3}+2$$
$$=\frac{5}{3}$$

$$\int_0^1\sqrt{1-t^2}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-sin^2\theta}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{cos^2\theta}cos\,\theta d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^2\theta d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta$$
$$=\left[\frac{\theta}{2}-\frac{sin\,2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{4}$$

したがって，求める体積は

$$V=\frac{5}{3}-\frac{\pi}{2}$$

$\int_0^1\sqrt{1-t^2}dt$ は半径１の円の面積の $\frac{1}{4}$ までであるから $\frac{\pi}{4}$ である。

$\boxed{3}$

解 説

複素数平面では絶対値は２乗して考えます。その際 $|z|^2$ は $z\overline{z}$ 必須事項です。また，共益な複素数の計算には十分に慣れておきましょう。
本問は成分計算しない方法で考えましたが，点P，点Qの座標をおいて解いてもかまいません。ただ，成分計算を用いると計算量が多くなるため，なるべく複素数のまま解けるように練習しましょう。
ベクトルを使った問題でも，同じことが言えます。ベクトルでも成分計算を減らせるようにしましょう。
PQの距離の最小値を求める際に，計算主体で考えることもできますが，できる限り図形的な考察を行い計算量を少なくするよう心掛けましょう。

解 答

(1) $|z-\alpha|=|z|$ より
$|z-\alpha|=|z-0|$
点Pは点Oと点Aからの距離が等しい点であるから，点Pは点Oと点Aの垂直二等分線上にある。
$2|w-\beta|=|w|$ より

$4(w-\beta)(\overline{w-\beta})=w\overline{w}$
$4w\overline{w}-4w\overline{\beta}-4\overline{w}\beta+\beta\overline{\beta}=w\overline{w}$
$3w\overline{w}-4w\overline{\beta}-4\overline{w}\beta+\beta\overline{\beta}=0$

$$3\left(w\overline{w}-\frac{4}{3}w\overline{\beta}-\frac{4}{3}\overline{w}\beta\right)+\beta\overline{\beta}=0$$

$$3\left(w-\frac{4}{3}\beta\right)\left(\overline{w}-\frac{4}{3}\overline{\beta}\right)+\beta\overline{\beta}-\frac{16}{3}\beta\overline{\beta}=0$$

$$3\left(w-\frac{4}{3}\beta\right)\left(\overline{w}-\frac{4}{3}\overline{\beta}\right)=\frac{13}{3}\beta\overline{\beta}$$

$$\left|w-\frac{4}{3}\beta\right|=\frac{\sqrt{13}}{3}|\beta|$$

したがって，点Qは線分OBを4：3に外分する点を中心とする円上にある。

⑵　$\alpha=-6+8i$，$\beta=-4+3i$のとき点Pは$\dfrac{\alpha}{2}=-3+4i$を通りOAに垂直な直線である。

$\left|\dfrac{\alpha}{2}\right|=5$より点Pの動く線分の長さは$10\sqrt{3}$である。

点Qの描く円の半径は$\dfrac{\sqrt{13}}{3}|\beta|$であるから，$\dfrac{\sqrt{13}}{3}|\beta|=\dfrac{5\sqrt{13}}{3}$である。

⑶　点Qの描く円の中心と，点Pの描く直線の距離は5であるから，点Pと点Qの最小値は$5-\dfrac{5\sqrt{13}}{3}$である。

したがって点Pと点Qの最小値は$5-\dfrac{5\sqrt{13}}{3}$である。

4

解 説

微分の計算はしっかり練習し習熟しましょう。高次導関数であっても，まずは微分することから始まります。

微分した後は，漸化式を作ることが作ることになります。両辺を微分して高次導関数を求めていきましょう。その中で，どのような関係式になるかが見えてくるはずです。

漸化式の証明は困ったらすぐに数学的帰納法を使いましょう。

本問では，作った漸化式は解けないものです。そのため，漸化式を繰り返して使い計算することになります。ただし，漸化式が隣り合う項ではなく，偶数番目の項，奇数番目の項同士で成り立つため偶奇で分けて考えましょう。

⑴

$$f'(x)=(x+\sqrt{x^2+1})'\times\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)\times\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}\times\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

である。

$$f''(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)'$$
$$=\left\{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}'$$
$$=-\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\times 2x$$
$$=-\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

したがって，

$Af''(x)+xf'(x)=0$に代入すると

$$-A\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}+x\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=0$$

$$x\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\left(-\frac{A}{x^2+1}+1\right)=0$$

$A=x^2+1$

$(x^2+1)f''(x)+xf'(x)=0$が成立する。

⑵⑴より

$(x^2+1)f^{(n+1)}(x)+(2n-1)xf^{(n)}(x)$
$\quad+(n-1)^2f^{(n-1)}(x)=0$　…①

を示せばよい。

⑵

証 明

[1] $n=1$ のとき

$(x^2+1)f^{(2)}(x)+(2-1)xf^{(1)}(x)+(1-1)^2f^{(0)}(x)$
$\quad=(x^2+1)f''(x)+xf'(x)$

であり，⑵より$(x^2+1)f''(x)+xf'(x)=0$であるか

ら，成立する。

[2] $n=k$のとき

①が成立すると仮定すると，

$$(x^2+1)f^{(k+1)}(x)+(2k-1)xf^{(k)}(x)$$
$$+(k-1)^2f^{(k-1)}(x)=0$$

この式がすべてのxについて成立するので，両辺をxで微分して

$$(2x)f^{(k+1)}(x)+(x^2+1)f^{(k+2)}(x)$$
$$+(2k-1)f^{(k)}(x)+(2k-1)xf^{(k+1)}(x)$$
$$+(k-1)^2f^{(k)}(x)=0$$
$$(x^2+1)f^{(k+2)}(x)+\{(2x)+(2k-1)x\}f^{(k+1)}(x)$$
$$+\{(2k-1)+(k-1)^2\}f^{(k)}(x)=0$$
$$(x^2+1)f^{(k+2)}(x)+(2k+1)xf^{(k+1)}(x)$$
$$+k^2f^{(k)}(x)=0$$

∴①は$n=k+1$のときも成立する。

[1],[2]より①式は任意の自然数nについて成立する。　証明終

(3)　①の両辺に$x=0$を代入すると

$$(0+1)f^{(n+1)}(0)+(2n-1)\ 0f^{(n)}(0)$$
$$+(n-1)^2f^{(n-1)}(0)=0$$
$$f^{(n+1)}(0)+(n-1)^2f^{(n-1)}(0)=0$$
$$\therefore f^{(n+1)}(0)=-(n-1)^2f^{(n-1)}(0)\quad\cdots②$$

ここで，(1)より$f^{(0)}(0)=0$，$f^{(1)}(0)=1$である。

$f^{(n)}(0)$はnの偶奇で場合分けして

nが偶数のとき

$f^{(0)}(0)=0$から$f^{(n)}(0)=0$となるので

$$f^{(10)}(0)=0$$

nが奇数のとき

$f^{(1)}(0)=1$から②式を繰り返し利用して

$$f^{(9)}(0)=-(7)^2f^{(7)}(0)$$
$$=-7^2\{-(5)^2f^{(5)}(0)\}$$
$$=7^2\times5^2\{-(3)^2f^{(3)}(0)\}$$
$$=-7^2\times5^2\times3^2\{-(1)^2f^{(1)}(0)\}$$
$$=7^2\times5^2\times3^2\times1^2\times1$$
$$=11025$$

である。

来月号では，昭和大学医学部の数学を攻略しますので，ご期待ください！

全12校の掲載予定は以下のとおりとなっております。

第61回／ 4月号　東邦大学医学部
第62回／ 5月号　東京女子医科大学
第63回／ 6月号　金沢医科大学
第64回／ 7月号　岩手医科大学医学部
第65回／ 8月号　北里大学医学部
第66回／ 9・10月合併号　日本大学医学部
第67回／10月臨時増刊号 聖マリアンナ医科大学
第68回／11月号　愛知医科大学医学部
第69回／12月号　東京医科大学
第70回／ 1・2月合併号　杏林大学医学部
第71回／ 3月増刊号　東京慈恵会大学
第72回／ 3月号　昭和大学医学部

東大螢雪会 医学部数学 攻略演習

マンツーマン指導で医歯薬学部に多くの合格者を輩出している「東大螢雪会」では，主要な私立大学医学部の予想問題を作成しています。このコーナーでは，「東大螢雪会」の作成した予想問題を用いて，主要な私立大学医学部の数学を攻略するための演習を行います。毎号１校分の演習を行い，全12校の連載となる予定です。

今月号では，昭和大学医学部の数学を攻略します！

第72回 昭和大学医学部 編

東大螢雪会講師　小池　淳

昭和大学医学部の数学は，英語と合わせて制限時間140分で小問集合２題，大問２題が出題されます。標準的な問題ですが，論述問題もあり，うまく解答しないと時間切れになります。小問集合は以前に比べると難易度も上がっているため手ごわい出題です。今回の予想問題では７割程度の得点率を目指して下さい。

$\boxed{1}$　次の各問に答えよ。ただし，答は結果のみを解答欄に記入せよ。

⑴　S 大学の１年生のうち，インフルエンザにかかった学生の割合は，予防接種を受けた場合は $\dfrac{1}{15}$，受けなかった場合は $\dfrac{1}{4}$ であった。また，予防接種受けた人の割合は $\dfrac{7}{10}$ であった。

(1-1)　S 大学の１年生がインフルエンザにかかった確率を求めよ。

(1-2)　インフルエンザにかかった人を選んだとき，その人が予防接種を受けていた確率を求めよ。

⑵　横の長さが1219，縦の長さが69の長方形の内部に長さが整数となる正方形を敷きつめる。

(2-1)　敷きつめることのできる正方形のうち最大となる正方形の１辺の長さを求めよ。

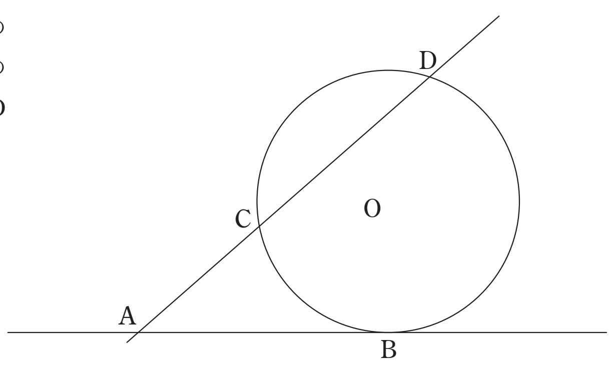
(2-2)　$1220x+69y=2$ をみたす整数 x，y を求めよ。

⑶　10人の学生にあるテストを行った結果が次のようになった。

７，８，４，６，６，５，２，３，９，10

このデータの分散を求めよ。

⑷　円 O の外部にある点 A から引いた接線の接点を B，点 A から引いた直線と円 O との交点を C，D とする。AB＝6，AC＝3，BD＝10 のとき BC の長さを求めよ。



$\boxed{2}$　空間内に点 O $(0,0,0)$，A $(-1,1,0)$，B $(1,0,0)$，C $(0,1,1)$，D $(0,1,0)$ がある。
また，直線 OA 上に点 H を OA⊥CH となるようにとり，$\angle\mathrm{CHD}=\theta$ とおく。次の各問に答えよ。ただし，(1)，(2)は結果のみを解答欄に記入せよ

(1)　点 H の座標を求めよ。

(2)　$\cos\theta$ の値を求めよ。

(3)　直線 OA と直線 BC の距離の最小値を求めよ。また，そのときの点の座標を求めよ。

$\boxed{3}$　次の各問に答えよ。ただし，答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　$2x^2+5xy+2y^2-4x+4y-16=0$ をみたす図形と接する円の中心が描く軌跡の方程式を求めよ。

(2)　$x>2$ のとき $\dfrac{x^2-2x+1}{x-2}$ の最小値を求めよ。

(3)　$k>0$ として，$4x^2+2(1-k)x-k=0$ の解が $\sin\theta$，$\cos\theta$ となるとき，θ の値を求めよ。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(4)　2 つの複素数 z，w があり，$|z-1|=1$，$w=(1+i)z$ をみたしている。w が複素数平面上に描く図形の内部の面積を求めよ。

$\boxed{4}$　自然数 n に対して，方程式 $\dfrac{\log x}{x}=\dfrac{1}{3n}$ $(x>0)$ を考える。次の各問に答えよ。ただし，(1)，(2)は結果のみを解答欄に記入せよ。なお，必要があれば，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ であること，$e<3$ であることを使ってよい。

(1)　方程式 $\dfrac{\log x}{x}=\dfrac{1}{3n}$ $(x>0)$ の解の個数を求めよ。

(2)　方程式 $\dfrac{\log x}{x}=\dfrac{1}{3n}$ の最小の解を a_n とするとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}a_n$ の値を求めよ。

$\boxed{1}$

解　説

(1)　条件付確率は表にすると全体像が見えて考えやすくなります。

本問では

	インフルエンザにかかった	かからない	合　計
予防接種を受けた	$\frac{1}{15}\times P(B)$	$\frac{14}{15}\times P(B)$	$P(B)=\frac{7}{10}$
受けない	$\frac{1}{4}\times P(\overline{B})$	$\frac{3}{4}\times P(\overline{B})$	$P(\overline{B})=\frac{3}{10}$
合　計	$P(A)$	$P(\overline{A})$	

(1-1)では，$P(A)$ を求めるので，$\frac{1}{15}\times P(B)+\frac{1}{4}\times P(\overline{B})$ とわかります。

(1-2)では，インフルエンザにかかったという条件の下での予防接種を受けた確率ですから，$\frac{1}{15}\times P(B)$ を $P(A)$ で割ればよいことがわかります。

(2)

(2-1)の題意は1219と69の最大公約数を求めることです。

1219と69の最大公約数を求めるためにはユークリッドの互除法を用いますが，本問はこの図形的な理解をするための問題です。

①短い辺69の長さの正方形を長方形内にできるだけ敷きつめる。

②残った長方形の短い辺（本問では46）の長さの正方形を残った長方形内にできるだけ敷きつめる。

③もとの長方形がすべて敷きつめられるまで②を繰り返す。

この手続きがユークリッドの互除法そのものです。ユークリッドの互除法を苦手としている方は，ぜひ図形的に理解してみましょう。

(2-2)では(2-1)を利用して不定方程式 $1220x+69y=2$ を解くことですが，まず，$1220x+69y=1$ を考えることになります。

(3)　データの分析では，用語，それぞれの計算方法をしっかり身につけておけば大丈夫です。

分散は（平均との差の2乗）の平均　または 2乗の平均―平均の2乗で求めます。

表をうまく使うとミスなく計算することができるでしょう。

(4)　初等幾何の問題です。とにかく相似を探しましょう。円が関係する場合は，円周角の定理，接弦定理に気を付けてみていきましょう。

解　答

(1)　インフルエンザにかかったという事象をA，予防接種を受けたという事象をBとする。

問題の条件より

$$P(B)=\frac{7}{10}$$

$$P_B(A)=\frac{1}{15}$$

$$P_{\overline{B}}(A)=\frac{1}{4}$$

である。

全事象の確率を考えると

$$P(\overline{B})=1-P(B)=\frac{3}{10}$$

である。

(1-1)

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})\\&=P(B)P_B(A)+P(B)P_{\overline{B}}(A)\\&=\frac{7}{10}\times\frac{1}{15}+\frac{3}{10}\times\frac{1}{4}\\&=\frac{28+45}{600}\\&=\frac{73}{600}\end{aligned}$$

(1-2)

$$\begin{aligned}P_A(B)&=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\\&=\frac{P(B)P_B(A)}{P(A)}\\&=\frac{\frac{7}{10}\times\frac{1}{15}}{\frac{73}{600}}\\&=\frac{7\times600}{73\times10\times15}\\&=\frac{28}{73}\end{aligned}$$

(2)

(2-1)　1辺69の長さの正方形を長方形内にできるだけ敷きつめると，

$1219=69\times17+46$

となり，横の長さ46，縦の長さ69の長方形が残る。

1辺46の長さの正方形を残った長方形にできるだけ敷きつめると，

$69=46\times1+23$

となり，横の長さ46，縦の長さ23の長方形が残る。

1辺23の長さの正方形を残った長方形にできるだけ敷きつめると，

$46=23\times2$

となるので，1辺23の長さの正方形で敷きつめることができる。

(2-2)　$1220x+69y=1$ を考える。

1220と69に互除法の計算をすると，

$1220=69\times17+47$　…①

$69=47\times1+22$　…②

$47=22\times2+3$　…③

$22=3\times7+1$　…④

で1220と69は互いに素であるので解を持つことがわかる。

④式から

$$\begin{aligned}1&=22-3\times7\\&=22-(47-22\times2)7\\&=22\times15+47\times(-7)\\&=(69-47\times1)15+47\times(-7)\end{aligned}$$

$=69\times15+47\times(-22)$
$=69\times15+(1220-69\times17)\times(-22)$
$=69\times(389)+1220\times(-22)$

したがって，$1220(-22)+69(389)=1$ である。

両辺に2をかけると

$1220(-22)\times2+69(389)\times2=1\times2$
$1220(-44)+69(778)=2$
$\therefore\quad 1220(x+44)+69(y-778)=0$

求める整数は $x=-44+69k$，$y=778+1220k$
(k は整数)

(3)

x	7	8	4	6	6	5	2	3	9	10	60
$x-\overline{x}$	1	2	-2	0	0	-1	-4	-3	3	4	0
$(x-\overline{x})^2$	1	4	4	0	0	1	16	9	9	16	60

上の表より分散は6

(4)　接弦定理より∠ABC＝∠ADB であり，∠BAC＝∠CAB が共通角であるから三角形 ABC と三角形 ADB は相似である。

BC：DB＝AC：AB より BC＝5

2

解　説

ベクトルで考えることになるでしょう。(1)，(2)についてはただ計算するだけです。

(3)　はねじれの関係にある直線間の距離の最小値を求める問題です。計算だけでも解けますが，図形的に考えたほうが計算が簡単になります。

2直線に垂直に交わる直線を考えましょう。そのためには直線 OA，BC の法線ベクトルを求める必要があります。

解　答

(1)　点 H は直線 OA 上の点であるから

$\overrightarrow{OH}=k\overrightarrow{OA}=(-k,k,0)$ とおけるから

$\overrightarrow{CH}=-\overrightarrow{OC}+k\overrightarrow{OA}=(-k,k-1,-1)$

OA⊥CH より $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CH}=0$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CH}=(-1,1,0)\cdot(-k,k-1,-1)$
$=k+k-1=0$

$\therefore\quad k=\dfrac{1}{2}$

よって，$H\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$

(2)　$\overrightarrow{HC}=-\overrightarrow{CH}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},1\right)$

$\overrightarrow{HD}=(0,1,0)-\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0\right)=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$

$|\overrightarrow{HC}|=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$，$|\overrightarrow{HD}|=\sqrt{\dfrac{1}{2}}$

$\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HD}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},1\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0\right)=\dfrac{1}{2}$

したがって，

$$\cos\theta=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(3)　$\overrightarrow{OA}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{BC}=(-1,1,1)$ に垂直なベクトルの一つを $\vec{n}=(a,b,c)$ とおくと

$-a+b=0$
$-a+b+c=0$

より $\vec{n}=(1,1,0)$ とできる。

点 P を $(-p,p,0)$ とおくと，点 Q は $(l-p,l+p,0)$ とおける。

点 Q は直線 BC 上にあり，z 座標が0の点だから点 B に一致することがわかる。

したがって，$l-p=1$，$l+p=1$ をみたすから $l=\dfrac{1}{2}$，$p=0$ であり，点 $P\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},0\right)$，$Q(1,0,0)$ であり，距離は $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ である。

3

解　説

(1)　まずは，$2x^2+5xy+2y^2-4x+4y-16=0$ が因数分解できるかどうか確認しましょう。

できなければ，長軸，短軸が座標軸に平行でない楕円を考えますが，その場合は誘導がつくはずですから，必ず因数分解できると信じて計算しましょう。

図形が直線であることがわかれば中心の軌跡は2直線のなす角の二等分線であることに気づくでしょう。角の二等分線は単位ベクトル，点と直線の距離を使って求めるとよいでしょう。

(2)　分数式では分母の次数＞分子の次数とすることが基本です。その後に，相加相乗平均に気づ

くと簡単に解けるでしょう。

そのままの形で考えて微分すると大変な計算をすることになります。

⑶　解と係数の関係を用いて２解の二乗の和が１になることを条件としてもよいでしょう。

ここでは，因数分解して解と直接求めてみます。

⑷　複素数 z の描く図形を求めるときには，$z=x+yi$ とおいて成分計算する方法，式の意味から見破る方法があります。

できれば成分計算しないで解けるようにしましょう。

その際基本となるのは，$|z-a|=r(r>0)$ は中心 a，半径 r の円を示します。

この形になるように計算しますが，その際には複素数の大きさの計算方法 $|z|^2=z\bar{z}$ を用います。ベクトル同様成分計算しないで解けるよう練習しましょう。

解　答

⑴　$2x^2+5xy+2y^2-4x+4y-16=0$ を x の降べきに整理して因数分解すると

$$2x^2+(5y-4)x+2y^2+4y-16$$
$$=2x^2+(5y-4)x+2(y^2+2y-8)$$
$$=2x^2+(5y-4)x+2(y-2)(y+4)$$
$$=(2x+y+4)(x+2y-4)$$

したがって，直線 $2x+y+4=0, x+2y-4=0$ が本問の図形である。

２直線に接する円の中心は２直線の角の二等分線である。

２直線の交点は $(-4,4)$ である。

x 軸上で２直線との距離が等しい点 $(a,0)$ を考えると，点と直線の距離より

$$\frac{|2a+4|}{\sqrt{5}}=\frac{|a-4|}{\sqrt{5}}$$
$$2a+4=\pm(a-4)$$
$$a=-8,0$$

したがって，求める軌跡の方程式は $y=-x, y=x+8$ である。

⑵

$$\frac{x^2-2x+1}{x-2}=x+\frac{1}{x-2}$$
$$=x-2+\frac{1}{x-2}+2$$

ここで $x>2$ より $x-2>0$，相加相乗平均の関係より

$$x-2+\frac{1}{x-2}\geqq 2\sqrt{(x-2)\frac{1}{x-2}}=2$$

したがって，最小値は４

⑶

$$4x^2+2(1-k)x-k=4x^2+2x-k(2x+1)$$
$$=(2x-k)(2x+1)$$

したがって，２解は $x=\frac{k}{2}, -\frac{1}{2}$ である。

２解が $\sin\theta$，$\cos\theta$ となるとき

$$\left(\frac{k}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=1$$
$$\frac{k^2+1}{4}=1$$
$$k^2=3$$
$$k=\sqrt{3}$$
$$(k>0)$$

$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\theta=-\frac{1}{2}$ または $\sin\theta=-\frac{1}{2}$，$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ である。

したがって，$\theta=\frac{2\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}$ となる。

⑷

$w=(1+i)z$ より

$$z=\frac{w}{1+i}$$
$$=\frac{w(1-i)}{2}$$

$|z-1|=1$ に代入して

$$\left|\frac{w(1-i)}{2}-1\right|=1$$
$$\left(\frac{w(1-i)}{2}-1\right)\left(\frac{\overline{w}(1+i)}{2}-1\right)=1$$
$$(w(1-i)-2)(\overline{w}(1+i)-2)=4$$
$$w\overline{w}(1-i^2)-2w(1-i)-2\overline{w}(1+i)=0$$
$$w\overline{w}-w(1-i)-\overline{w}(1+i)=0$$
$$(w-1-i)(\overline{w}-1+i)-(1-i)(1+i)=0$$
$$(w-1-i)(\overline{w}-1+i)=2$$
$$(w-1-i)(\overline{w-1-i})=2$$
$$|w-1-i|=\sqrt{2}$$

w は中心 $1+i$，半径 $\sqrt{2}$ の辺を描くから面積は 2π

4

解　説

本問の方程式は解けないので，グラフを描いて考察することになります。

極限は，a_n の一般項が求められないため，直接極限値を計算できません。そこで，はさみうちの原理を使うことになります。

解　答

(1)　$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とおく，

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}x-\log x}{x^2}$$

$$=\frac{1-\log x}{x^2}$$

$\log x=1$ のとき $f'(x)=0$ となるから，$x=e$ のとき極値をとる。

増減表は

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	1／e	↘	0

極大値は $\dfrac{1}{e}$ となり，$\dfrac{1}{e}>\dfrac{1}{3}\geqq\dfrac{1}{3n}>0$ となるから，

$\dfrac{\log x}{x}=\dfrac{1}{3n}$ は解を 2 個持つ。

(2)　小さいほうの解は $1<a_n<e$ の範囲に存在する。このとき，$f(x)$ は単調増加関数である。

$$g(x)=\frac{\log x}{x}-\frac{1}{3n} \text{ とおくと}$$

$$g(1)=0-\frac{1}{3n}$$

$$g(e^{\frac{1}{n}})=\frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}}-\frac{1}{3n}=\frac{1}{ne^{\frac{1}{n}}}-\frac{1}{3n}$$

ここで，$g(e^{\frac{1}{n}})$ の符号を調べるために $\dfrac{1}{ne^{\frac{1}{n}}}, \dfrac{1}{3n}$ の大小を比較する。

$ne^{\frac{1}{n}}$ と $3n$ をそれぞれ n 乗して比較すると

$e<3$ と 3^n となるから，$ne^{\frac{1}{n}}<3n$ より $\dfrac{1}{ne^{\frac{1}{n}}}>\dfrac{1}{3n}$

したがって，$1<a_n<e^{\frac{1}{n}}$ であり，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{n}}=e^0=1$ であるから，

はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{x\to\infty} a_n=1$ である。

来月号では，東邦大学医学部の数学を攻略しますので，ご期待ください！

全12校の掲載予定は以下のとおりとなっております。

第73回／４月号　東邦大学医学部
第74回／５月号　東京女子医科大学
第75回／６月号　金沢医科大学
第76回／７月号　岩手医科大学医学部
第77回／８月号　北里大学医学部
第78回／９・10月合併号　日本大学医学部
第79回／10月臨時増刊号　聖マリアンナ医科大学
第80回／11月号　愛知医科大学医学部
第81回／12月号　東京医科大学
第82回／１・２月合併号　杏林大学医学部
第83回／３月増刊号　東京慈恵会大学
第84回／３月号　昭和大学医学部