東大螢雪会 医学部数学 攻略演習

マンツーマン指導で医歯薬学部に多くの合格者を輩出している「東大螢雪会」では，主要な私立大学医学部の予想問題を作成しています。このコーナーでは，「東大螢雪会」の作成した予想問題を用いて，主要な私立大学医学部の数学を攻略するための演習を行います。毎号１校分の演習を行い，全12校の連載となる予定です。

今月号では，杏林大学医学部の数学を攻略します！

第70回 杏林大学医学部 編

東大螢雪会講師　小池　淳

杏林大学医学部の数学は，制限時間60分で大問４題の出題がされます。すべて誘導付きですが，誘導にうまく従って処理しないと時間切れになります。以前に比べると難易度も上がっているため手ごわい出題です。今回の予想問題では７割程度の得点率を目指して下さい。

$\boxed{1}$ １から６までのいずれか１つの数字が書かれたカードが６枚ある。このカードを無作為に並べ，左から順にカードに書かれた数字をたしていき，和が11になったところで終了する。足した数の個数を a，最後にたした数を b とする。

a の取りうる値は $\boxed{\text{ア}}$ 個である。

$a=2$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$ であり，

$a=3$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キク}}}$ である。

$a=3$ であるとき，$b=1$ である条件付確率は

$\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ である。

$\boxed{2}$ 複素数平面上で，複素数 α で表される点をＡ，β で表される点をＢとし，点Ａは第２象限によるものとする。２点Ａ，Ｂは原点Ｏを中心とする半径１の円Ｃ上にあり

$$\sqrt{2}\,\alpha\beta-\sqrt{2}\,\alpha+1+i=0 \cdots ①$$

を満たしている。

①式は

$$\alpha-\frac{1+i}{\sqrt{2}}=\alpha\beta$$

と変形でき，$|\alpha\beta|=\boxed{\text{ア}}$ より，$\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ で表される点をＣとおくと，点Ｃは $\boxed{\text{イ}}$ 上にあり，三

角形 OAC は $\boxed{\text{ウ}}$ であることがわかる。

したがって，点 A は点 C を原点 O のまわりに $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\pi$ 回転した点であり

$$\alpha=\cos\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}\pi+i\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}\pi$$

$$\beta=\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}-\frac{\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{ス}}}i$$ である。

$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ の選択肢

①直線 OA
②直線 AB
③円 C
④直角三角形
⑤正三角形
⑥二等辺三角形

$\boxed{3}$　点 O を中心とする半径 1 の円に内接する三角形 ABC がある。直線 OA と辺 BC の交点を D とすると，点 D は辺 BC を 1 ： 2 に内分し，点 O は線分 AD を 3 ： 2 に内分する。

(a)　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

である。

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=1$ より内積 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の値は

$-\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

(b)　三角形 OAB，OBC，OCA の重心をそれぞれ P，Q，R とすると三角形 PQR の面積は

$\dfrac{\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケコサ}}}$ である。

$\boxed{4}$　連続関数 $f(x)$ および定数 a について

(a)　定積分 $\int_0^a f(x)\,dx$ を考える。

$$\int_0^a f(x)=\int_0^{\frac{a}{2}}\boxed{\text{ア}}\,dx$$

が成り立つ。

(b)　$y=\dfrac{\cos x}{\sin x+\cos x}$ と x 軸，y 軸，直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$

で囲まれた図形の面積 S を求めると，

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\boxed{\text{イ}}\,dx$$

$$=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\pi$$

となる。

$\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$ の選択肢

① $f(x)$

② $f(a-x)$

③ $f(x-a)$

④ $\dfrac{1}{\sin x+\cos x}$

⑤ $\dfrac{\cos x}{\sin x+\cos x}+\dfrac{\sin x}{\sin x\cos x}$

⑥ $\sin x+\cos x$

$\boxed{1}$

解　説

事象を理解するためにとりあえずカードを並べてたしてみましょう。

例えば

$\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{6}$, $\boxed{1}$, $\boxed{5}$ と並べると左から４枚目の６までたすと11以上になるので，$a=4$，$b=6$ となります。

a はたす数の個数ですから，小さい数をたすと a は大きくなり，大きい数をたすと a は小さくなることがわかります。

a を指定された場合はその数の個数で11以上となる数の組み合わせを考えればよいので難しくないでしょう。

条件付確率は与えられた条件を全事象として確率を求めるだけです。

解　答

小さい順に数をたしていくと

$1+2+3+4+5=15$

で11以上となるから $a\leqq 5$

大きい順に数をたしていくと

$6+5=11$

で11以上となるから $2\leqq a$

したがって $2\leqq a\leqq 5$ より

a の取りうる値は４個

上の議論で考えたように

$a=2$ となるのは５と６をたしたとき

左から２枚は５又は６を並べ３枚目以降は残った４枚を並べればよいから並べ方は

$2\times 4!$

全部の並べ方は $6!$ であるから，求める確率は

$\dfrac{2\times 4!}{6!}=\dfrac{1}{15}$ である。

３つの数をたして11以上となる組み合わせは

$11=6+4+1$，$6+3+2$，$5+4+2$

$12=6+5+1$，$6+4+2$，$5+4+3$

$13=6+5+2$，$6+4+3$

$14=6+5+3$

$15=6+5+4$

である。６，５が入った組み合わせは６，５が左から２枚並ぶと $a=2$ となるので並べ方は４通りそれ以外は６通りとなるので，はじめの３枚のカードの並べ方は

$4\times4+6\times6=52$ 通り

4 枚目以降は残った 3 枚を並べればよいから

$52\times3!$

したがって確率は $\dfrac{52\times3!}{6!}=\dfrac{13}{30}$

$a=3$ のとき $b=1$ となる並べ方は左から 3 枚を

$\boxed{6}\boxed{4}\boxed{1}$　$\boxed{4}\boxed{6}\boxed{1}$　$\boxed{6}\boxed{5}\boxed{1}$　$\boxed{5}\boxed{6}\boxed{1}$

と並べればよいから

$4\times3!$

したがって条件付確率は

$\dfrac{4\times3!}{52\times3!}=\dfrac{1}{13}$ である。

$\boxed{2}$

解　説

複素数平面での図形的な問題は苦手としている人が多い問題です。

ただ本問は基本的なことだけで解答できる問題なので，ぜひ克服してください。

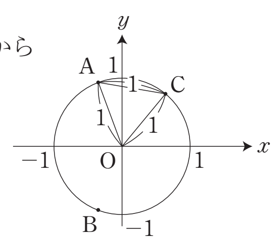
大きさが 1 の複素数のかけ算により表される複素数の大きさも 1 となります。

$$
\begin{aligned}
|\alpha\beta|^2&=(\alpha\beta)(\overline{\alpha\beta})\\
&=(\alpha\overline{\alpha})(\beta\overline{\beta})\\
&=|\alpha|^2|\beta|^2\\
&=1
\end{aligned}
$$

$\therefore\ |\alpha\beta|=1$

又，複素数のかけ算は極形式で考えると角度の回転と大きさの積となりますので（「ド・モアブルの定理」），$\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ を極形式で考えましょう。

解　答



$|\alpha|=1$，$|\beta|=1$ であるから

$$
\begin{aligned}
|\alpha\beta|^2&=(\alpha\beta)(\overline{\alpha\beta})\\
&=(\alpha\overline{\alpha})(\beta\overline{\beta})\\
&=1
\end{aligned}
$$

である。

したがって，$\left|\alpha-\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right|=1$ より

$\mathrm{AC}=1$ である。

$\left|\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right|=1$ より C は円 C 上にある。

又，$\mathrm{OA}=\mathrm{AC}=\mathrm{OC}=1$ となるから三角形 OAC は正三角形である。

$\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}$ であり，$\angle\mathrm{AOC}=\dfrac{\pi}{3}$ であるから，点 A は点 C を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{3}$ 回転した点となり偏角は $\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{7}{12}\pi$ となる。

したがって，

$$\alpha=\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin\frac{7}{12}\pi$$

α を計算すると

$$\alpha=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}i$$

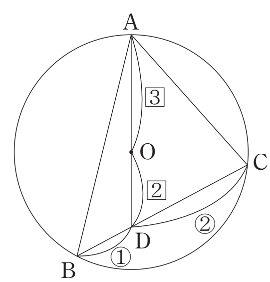
①より

$$
\begin{aligned}
\beta&=1-\frac{1+i}{\sqrt{2}\,\alpha}\\
&=1-\frac{2(1+i)}{1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i}\\
&=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i
\end{aligned}
$$

である。

$\boxed{3}$

解　説



$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を求めることは問題ないでしょう。

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を求めるためには $\angle\mathrm{BOC}$ 又は，内積の入った関係式が必要となります。

本問では，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=1$ という誘導を付けましたが，この誘導がなくても使えるようにしましょう。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ から求めることができるので

内積 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が求まることになります。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で表せることから

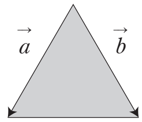
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ は全て $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で表せます。

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ について大きさと内積がわかっているので面積を求めることは問題ないでしょう。

できれば面積の公式として

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

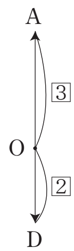
は覚えておきましょう。



解　答

(a)　点 D は線分 BC を 1 ： 2 に内分するので

$$\overrightarrow{OD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$$



点 O は線分 AD を 3 ： 2 に内分するので

$$\overrightarrow{OA}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{OD}$$

$$\therefore\quad |\overrightarrow{OA}|=\frac{3}{2}|\overrightarrow{OD}|=1$$

$$\left(\frac{3}{2}|\overrightarrow{OD}|\right)^2=\frac{9}{4}\left(\frac{4}{9}|\overrightarrow{OB}|^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+\frac{1}{9}|\overrightarrow{OC}|^2\right)$$

$$=\frac{9}{4}\left\{\frac{5}{9}+\frac{4}{9}(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC})\right\}$$

$$\therefore\quad \frac{5}{9}+\frac{4}{9}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{4}{9}$$

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=-\frac{1}{4}$$

(b)　各重心はそれぞれ

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$$

$$=-\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$$

$$=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}$$

と表される。

したがって三角形 PQR において

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$$

$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}$$

$$=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$$

となる。

$$|\overrightarrow{PQ}|^2=\left|\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right|^2$$

$$=\frac{5}{18}$$

$$|\overrightarrow{PR}|^2=\left|-\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}\right|^2$$

$$=\frac{5}{18}$$

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}\right)$$

$$=\frac{5}{72}$$

求める面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2|\overrightarrow{PR}|^2-(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{18}\times\frac{5}{18}-\left(\frac{5}{72}\right)^2}$$

$$=\frac{5\sqrt{15}}{144}$$

4

解　説

(a)　問題の誘導で積分区間を

$0\to a$ を $0\to\dfrac{a}{2}$ に変換していることがわかります。

そこで，とりあえず積分を

$$\int_0^{\frac{a}{2}}f(x)\,dx+\int_{\frac{a}{2}}^{a}f(x)\,dx$$

と分けて考えてみましょう。

問題の誘導と合わないのは第 2 項ですから，この積分を $0\to\dfrac{a}{2}$ に変換するという方針は見つけやすいのではないでしょうか。

$t=a-x$ とおいて変換すると，

$$\int_{\frac{a}{2}}^{a}f(x)\,dx=\int_{\frac{a}{2}}^{0}-f(a-t)\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{a}{2}}f(a-t)\,dt$$

t を x に書き直すと

$\displaystyle\int_{\frac{a}{2}}^{a}f(x)\,dx=\int_0^{\frac{a}{2}}f(a-x)\,dx$ となります。

(b)ではそのままでは積分が難しいため(a)を利用します。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\,dx$$

あとは，第２項を整理して計算しましょう。

$\boxed{\text{解　答}}$

(a)　積分区間を $0\to\frac{a}{2}$，$\frac{a}{2}\to a$ に分けて

$$\int_0^a f(x)\,dx=\int_0^{\frac{a}{2}}f(x)\,dx+\int_{\frac{a}{2}}^a f(x)\,dx$$

第２項において $t=a-x$ とおくと

x	$\frac{a}{2}\to a$
t	$\frac{a}{2}\to 0$

$dt=-dx$ であるから

$$\int_{\frac{a}{2}}^a f(x)\,dx=\int_{\frac{a}{2}}^0 f(a-t)(-dt)$$

$$=\int_0^{\frac{a}{2}}f(a-t)\,dt$$

t を x に書き換えると $\int_0^{\frac{a}{2}}f(a-x)\,dx$ だから

$$\int_0^a f(x)\,dx=\int_0^{\frac{a}{2}}f(x)\,dx+\int_0^{\frac{a}{2}}f(a-x)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{a}{2}}\{f(x)+f(a-x)\}\,dx$$

(b)　(a)を利用して

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}+\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\,dx$$

ここで $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$ より

$$(\text{右辺})=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}+\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx$$ となる

したがって

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\,dx$$

$$=[x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\pi}{4}$$

来月号では，東京慈恵会大学の数学を攻略しますので，ご期待ください！

全12校の掲載予定は以下のとおりとなっております。

第61回／４月号　東邦大学医学部
第62回／５月号　東京女子医科大学
第63回／６月号　金沢医科大学
第64回／７月号　岩手医科大学医学部
第65回／８月号　北里大学医学部
第66回／９・10月合併号　日本大学医学部
第67回／10月臨時増刊号　聖マリアンナ医科大学
第68回／11月号　愛知医科大学医学部
第69回／12月号　東京医科大学
第70回／１・2月合併号　杏林大学医学部
第71回／３月増刊号　東京慈恵会大学
第72回／３月号　昭和大学医学部

「東大螢雪会」では，本誌をご覧の方々の学力アップのために，主要な私立大学医学部の予想問題を無料でプレゼントしています。ご希望の方は，「東大螢雪会」のホームページ（http://www.keisetsukai.com）（PC・携帯）からお問い合わせください。