東大螢雪会 **医学部数学** 攻略演習

マンツーマン指導で医歯薬学部に多くの合格者を輩出している「東大螢雪会」では，主要な私立大学医学部の予想問題を作成しています。このコーナーでは，「東大螢雪会」の作成した予想問題を用いて，主要な私立大学医学部の数学を攻略するための演習を行います。毎号１校分の演習を行い，全12校の連載となる予定です。

今月号では，聖マリアンナ医科大学の数学を攻略します！

第67回　聖マリアンナ医科大学 編

東大螢雪会講師　小池　淳

聖マリアンナ医科大学の数学は，制限時間90分で小問４題と大問３題の出題がされます。数学Ⅲ分野からの出題比率が高く，制限時間に対して計算量が多いため，迅速な対応と正確な計算が要求されます。７割程度の得点率が必要でしょう。今回の予想問題でも７割程度の得点率を目指して下さい。

$\boxed{1}$ 以下の〔１〕～〔４〕の $\boxed{\quad ① \quad}$ ～ $\boxed{\quad ⑤ \quad}$ に適切な値を答えなさい。

〔１〕関数 $f(x)=\sin^2 x+b\cos^2 x+c\sin x\cos x$ の最大値が２，最小値が－１のとき，c の値は $\boxed{\quad ① \quad}$ である。

〔２〕三角形 ABC の周囲の長さが33，三角形に内接する円の半径が３である。点 Q が $6\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+3\overrightarrow{\mathrm{BQ}}+2\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\vec{0}$ を満たすとき，三角形 QBC の面積はである。

〔３〕２つの放物線 $C_1: 4y^2=x$，$C_2: (y-3)^2=x$ がある。C_1 上の点 P での接線と，C_2 上の点 Q での接線が平行であるとき，点 P，Q を通る直線は定点（ $\boxed{\quad ③ \quad}$ ， $\boxed{\quad ④ \quad}$ ）を通る。

〔４〕定積分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \log\dfrac{1-x}{1+x}\,dx$ の値は $\boxed{\quad ⑤ \quad}$ である。

$\boxed{2}$ 連立漸化式 $\begin{cases} 3a_{n+1}=7a_n+b_n \\ 3b_{n+1}=2a_n-8b_n \end{cases}$ を考える。$a_1=a$，$b_1=b$ とする。

⑴　数列 $\{a_n+kb_n\}$ が等比数列となるような k は二つ存在し，k_1，k_2 $(k_1<k_2)$ とすると，

$k_1=\boxed{\quad ① \quad}$，$k_2=\boxed{\quad ② \quad}$ である。

⑵　$a_n+k_1b_n=\boxed{\quad ③ \quad}$

$a_n+k_2b_n=\boxed{\quad ④ \quad}$

⑶　a_n，b_n を a，b 用いて表すと，$a_n=\boxed{\quad ⑤ \quad}$，$b_n=\boxed{\quad ⑥ \quad}$

$\boxed{3}$ k を実数とするとき，方程式 $x^3-(2k+1)x^2+(3k^2+2k)x-3k^2=0$ の解を z_1，z_2，z_3 とする。これらの解を複素平面上の点とする。

(1)　z_1, z_2, z_3 が一直線上にあるとき k の値は $\boxed{\quad ⑤ \quad}$ である。

(2)　z_1, z_2, z_3 が正三角形の頂点となるとき，k の値は $\boxed{\quad ⑤ \quad}$ である。

$\boxed{4}$　以下の問について答えなさい。

〔1〕次の不定積分を求めなさい。積分定数は書かなくてもよい。

1）$\int xe^x dx$

2）$\int x^2 e^x dx$

〔2〕実数 x　$(0 \leqq x \leqq 1)$ に対して，$f(x) = \int_0^1 e^{-|t-x|} t(1-t)\,dt$ と定める。$f(x)$ は

$f(x) = \int_0^x \boxed{\quad ① \quad}\,dt + \int_x^1 \boxed{\quad ② \quad}\,dt$ と表すことができるから，

$f(x) = \boxed{\quad ③ \quad}(e^{x-1} + e^{-x}) - \boxed{\quad ④ \quad}(x^2 - x + 2)$ である。$f(x)$ は $x = \boxed{\quad ⑤ \quad}$ のとき極大値 $\boxed{\quad ⑥ \quad}$ をとる。

$\boxed{1}$

〔1〕

解　説

三角関数では振動の中心と振幅に着目するとグラフの概形がわかります。

本問では，最大値が２，最小値が－１であることから，振動の中心が $x = \frac{1}{2}$，振幅が $\frac{3}{2}$ であることがわかります。

$\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\sin x \cos x$ という項があるので，２倍角の公式を用いて整理するのは当然でしょう。

振動の中心と振幅に着目すればよいので，その後の計算は簡単にできるでしょう。

解　答

$$f(x) = \sin^2 x,\ b\cos^2 x,\ c\sin x\cos x$$

$$= \frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 2x}{2}b + \frac{\sin 2x}{2}c$$

$$= \frac{b-1}{2}\cos 2x + \frac{c}{2}\sin 2x + \frac{1+b}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{(b-1)^2+c^2}\,\sin(2x+\phi)}{2} + \frac{1+b}{2}$$

最大値が２，最小値が－１より

$$\frac{\sqrt{(b-1)^2+c^2}}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1+b}{2} = \frac{1}{2}$$

である。

したがって，$b=0$ となるから，

$\sqrt{1+c^2} = 3$

$c^2 = 8$

$c = \pm 2\sqrt{2}$

である。

〔2〕

解　説

三角形 ABC の面積は，周囲の長さと内接円の半径がわかっているので簡単に求めることができるでしょう。

点 Q の位置についても考え方は基本事項でしょう。三角形 QBC の面積を問われているので，点 A を始点にするのがベストです。

解　答

三角形 ABC の面積 S は内接円の半径 r を用いると

$S = \frac{(AB+BC+CA)r}{2}$ と表せる。

三角形 ABC の周囲の長さが33，三角形に内接する円の半径が３より，

$S=\dfrac{33\times3}{2}$

$=\dfrac{99}{2}$

また，

$6\,\overrightarrow{AQ}+3\,\overrightarrow{BQ}+2\,\overrightarrow{CQ}$

$=6\,\overrightarrow{AQ}+3\left(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AQ}\right)+2\left(-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CQ}\right)$

$=11\,\overrightarrow{AQ}-3\,\overrightarrow{AB}-2\,\overrightarrow{AC}$

であるから，

$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{3\,\overrightarrow{AB}+2\,\overrightarrow{AC}}{11}$

$=\dfrac{5}{11}\,\dfrac{3\,\overrightarrow{AB}+2\,\overrightarrow{AC}}{5}$

辺 BC を 2 ： 3 に内分する点を M とすると，点 Q は，線分 AQ を 6 ： 5 に内分する点である。したがって，三角形 QBC の面積 S' は

$S'=\dfrac{6}{11}\,S$

$=\dfrac{6}{11}\times\dfrac{99}{2}$

$=27$

である。

〔3〕

解　説

数学Ⅲで学習する放物線の形で示した 2 つの放物線についての問題です。

放物線の標準形は $y^2=4ax$ で表すことができ，放物線上の点 $(x_1,\ y_1)$ での接線の公式は $y_1y=2a(x+x_1)$ です。

今回は，この公式を用いて接線の方程式を求めましたが，当然微分して考えることもできます。微分する場合には，y について解いてからでは計算が複雑になるので陰関数の微分法を用いるか，x，y を入れ替えて（逆関数を考えることになります）考えるとよいでしょう。

2 本の接線が平行である条件から接線を求める際に置いた点 P，Q の座標どちらかの 1 変数とすることは問題ないでしょう。定点を通ることは，恒等式として考えることになります。

解　答

$P(4p^2,\ p)$，$Q((q-3)^2,\ q)$ とおくと，

$C_1:4y^2=x$ の接線は

$py=2\times\dfrac{1}{16}(x+4p^2)$

$8py=x+4p^2$

$C_2:(y-3)^2=x$ の接線は

$(q-3)(y-3)=2\times\dfrac{1}{4}(x+(q-3)^2)$

$2(q-3)(y-3)=x+(q-3)^2$

2 本の接線が平行であることより

$8p=2(q-3)$

$4p=q-3$

である。

ここで，点 PQ を通る直線の方程式は

$(q-p)(x-4p^2)-\{(q-3)^2-4p^2\}(y-p)=0$

である。q を消去して，

$(4p+3-p)(x-4p^2)-\{(4p)^2-4p^2\}(y-p)=0$

$(3p+3)(x-4p^2)-12p^2(y-p)=0$

p について整理すると

$3xp+3x-12p^3-12p^2-12yp^2+12p^3=0$

$-12(1+y)p^2+3xp+3x=0$

であり，$x=0$，$y=-1$ のとき p について恒等的に成立するから点 $(0,\ -1)$ を通る。

〔4〕

解　説

部分積分を使うことになります。

解答では $(x)'\log\dfrac{1-x}{1+x}$ として考えましたが，

$\log\dfrac{1-x}{1+x}=\log(1-x)-\log(1+x)$ と変形してから考えてもよいでしょう。

このときは $\log(1-x)-\log(1+x)$

$=-(1-x)'\log(1-x)-(1+x)'\log(1+x)$ とすることになります。

解　答

$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\log\frac{1-x}{1+x}\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}x'\log\frac{1-x}{1+x}\,dx$

$\displaystyle=\left[x\log\frac{1-x}{1+x}\right]_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}x\left(\log\frac{1-x}{1+x}\right)'dx$

$$=\left(\frac{1}{2}\log\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}\right)-\int_0^{\frac{1}{2}}x\left\{\frac{\frac{(1-x)'(1+x)-(1-x)(1+x)'}{(1+x)^2}}{\frac{1-x}{1+x}}\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}x\left\{\frac{\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}}{\frac{1-x}{1+x}}\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{1}{3}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{-2x}{(1+x)(1-x)}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{1}{3}-\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{1}{3}-\left[\log(1+x)+\log(1-x)\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{1}{3}-\left[\log\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log\left(1-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{1}{3}-\left[\log\frac{3}{2}+\log\frac{1}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{1}{3}-\log\frac{3}{4}$$

$$=\log\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{3}{4}}$$

$$=\log\frac{4}{3\sqrt{3}}$$

2

解　説

連立漸化式 $\begin{cases}3a_{n+1}=7a_n+b_n\\3b_{n+1}=2a_n-8b_n\end{cases}$ を考える際には，$\{pa_n+qb_n\}$ のようにうまく組み立てて独立な漸化式を作ることが必要です。

ただし，自力で組み立てることは必要なく，問題の誘導に沿って考えていくことができれば十分です。（旧課程では行列を用いて自力で組み立てることが必須でした。）

今回は $\{a_n+kb_n\}$ となるので，k を求めることは容易でしょう。

数列 $\{a_n+k_1b_n\}$ の一般項と与えられた漸化式から3項間漸化式を作ることもできますが，迂遠なので2つの数列 $\{a_n+k_1b_n\}$，$\{a_n+k_2b_n\}$ の一般項を求めて連立して求めましょう。

ただし，k が重解になる場合は当然この解法が使えませんので難易度は上がります。

(1)　数列 $\{a_n+kb_n\}$ が等比数列となるような k は二つ存在し，k_1，k_2 $(k_1<k_2)$ とすると，

$k_1=\boxed{\quad ① \quad}$，$k_2=\boxed{\quad ② \quad}$ である。

(2)　$a_n+k_1b_n=\boxed{\quad ③ \quad}$

$a_n+k_2b_n=\boxed{\quad ④ \quad}$

(3)　a_n，b_n を a，b 用いて表すと，

$a_n=\boxed{\quad ⑤ \quad}$，$b_n=\boxed{\quad ⑥ \quad}$

3

解　説

聖マリアンナ医科大学では，旧課程当時行列が毎年出題されていました。新課程では複素平面が変わって出題されるのではという予想で出題しました。

複素平面では平行条件，直交条件は複素数の商がそれぞれ実数，純虚数となることです。実数であることは複素数 $z=\overline{z}$，純虚数であることは $z=-\overline{z}$ と共役な複素数を用いた条件を作ることになり，

共役な複素数の計算に習熟することがポイントになります。しっかり練習し身に着けるようにしてください。

また，複素平面の特徴は回転移動を容易に計算できることです。極形式を用いて回転移動を計算することにも習熟しましょう。

本問の解答では，図形的な考え方で計算量を減らすことを考えています。いつでも図形的な考え方を検討するようにしましょう。

解　答

$x^3-(2k+1)x^2+(3k^2+2k)x-3k^2$
$\qquad=(x-1)(x^2-2kx^2+3k^2)$

$x^2-2kx^2+3k^2=0$ の解は，解の公式より

$x=(1\pm\sqrt{2}\,i)k$

である。

$z_1=1$，$z_2=(1-\sqrt{2}\,i)k$，$z_3=(1+\sqrt{2}\,i)k$ とする。

$k=0$ のとき

$z_1=1$, $z_2=z_3=0$ となり，３点とも実軸上にあるから題意を満たす。

$k\neq 0$ のとき

$z_2=\overline{z_3}$ であるから，z_1 が z_2, z_3 の中点となればよい。

$$\frac{z_2+z_3}{2}=\frac{(1-\sqrt{2}\,i)k+(1+\sqrt{2}\,i)k}{2}$$

$=k$

より $k=1$

以上より，z_1, z_2, z_3 が一直線上にあるような k の値は $k=0$, 1 である。

$\boxed{\text{別　解}}$

$z_1\neq z_2$, $z_1\neq z_3$ である。

z_1, z_2, z_3 が一直線上にあるのは，

$\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$ が実数になるときである。

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\frac{(1+\sqrt{2}\,i)k-1}{(1-\sqrt{2}\,i)k-1}$$

$$=\frac{k-1+\sqrt{2}\,ki}{k-1-\sqrt{2}\,ki}$$

$$=\frac{(k-1+\sqrt{2}\,ki)^2}{(k-1-\sqrt{2}\,ki)(k-1+\sqrt{2}\,ki)}$$

$$=\frac{(k-1+\sqrt{2}\,ki)^2}{(k-1)^2+2k^2}$$

$$=\frac{k^2-2k+1+2\sqrt{2}(k-1)ki+2k^2i^2}{k^2-2k+1-2k+2k^2}$$

$$=\frac{-k^2-2k+1+2\sqrt{2}(k^2-k)i}{3k^2-2k+1}$$

この値が実数になるのは

$k^2-k=0$ のときだから，$k=0$, 1 である。

(2)　$k=0$ のとき

$z_2=z_3=0$ となり三角形とならないから不適である。

$k\neq 0$ のとき

$$\begin{aligned}|z_2-z_3|&=|(1-\sqrt{2}\,i)k-(1+\sqrt{2}\,i)k|\\&=|-2\sqrt{2}\,ik|\\&=2\sqrt{2}\,k\end{aligned}$$

であるから，$|z_1-z_2|^2=8k^2$ となればよい。

$$\begin{aligned}z_1-z_2&=1-(1-2\sqrt{2}\,i)k\\&=1-k+2\sqrt{2}\,ki\end{aligned}$$

より

$|z_1-z_2|^2=(1-k)^2+(\sqrt{2}\,k)^2$

$=k^2-2k+1+2k^2$

$=3k^2-2k+1$

$3k^2-2k+1=8k^2$

$5k^2+2k-1=0$

$$k=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-5(-1)}}{5}$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{6}}{5}$$

$k=\dfrac{-1\pm\sqrt{6}}{5}$ である。

$\boxed{\text{別　解}}$

z_2 を z_1 の周りに $\pm30^\circ$ 回転したときに実数となればよい。

$(z_2-z_1)(\cos 30^\circ\pm i\sin 30^\circ)$

$$=\{(k-1)-\sqrt{2}\,ki\}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}i\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}(k-1)-\sqrt{6}\,ki\pm(k-1)i\mp\sqrt{2}\,ki^2}{2}$$

$$=\frac{(\sqrt{3}\pm\sqrt{2})k+\sqrt{3}+(\pm k-\sqrt{6}\,k\mp1)i}{2}$$

この値が実数になるのは

$\pm k-\sqrt{6}\,k\mp1=0$ のときだから，

$(1-\sqrt{6})k=1$

$$k=\frac{1}{1-\sqrt{6}}$$

$$=\frac{1+\sqrt{6}}{(1-\sqrt{6})(1+\sqrt{6})}$$

$$=\frac{-1-\sqrt{6}}{5}$$

$(-1-\sqrt{6})k=-1$

$$k=\frac{1}{1+\sqrt{6}}$$

$$=\frac{1-\sqrt{6}}{(1+\sqrt{6})(1-\sqrt{6})}$$

$$=\frac{-1+\sqrt{6}}{5}$$

$k=\dfrac{-1+\sqrt{6}}{5}$ である。

$\boxed{4}$ 以下の問について答えなさい。

解　説

積分計算は小問，大問問わず頻出しています。計算ミスをしないようにしましょう。
積分で定義された関数で，積分区間には変数が入っていないため積分を定数とおけるようにも見えますが，被積分関数の絶対値を外すと積分区間に変数が入ってきます。ただし，積分が容易であり1），2）で計算している形ですから，$f(x)$を求めることは問題ないでしょう。

極値を求めるためには当然微分しますが，1階微分で関数の増減がわかりにくいときには，2階微分して微分係数を求めるとよいでしょう。

〔1〕

解　答

1）

$$\int xe^x dx = \int x(e^x)' dx$$
$$= xe^x - \int (x)' e^x dx$$
$$= xe^x - \int e^x dx$$
$$= xe^x - e^x \cdots\cdots ①$$

2）

$$\int x^2 e^x dx = \int x^2 (e^x)' dx$$
$$= x^2 e^x - \int (x^2)' e^x dx$$
$$= x^2 e^x - 2\int xe^x dx$$
$$= x^2 e^x - 2(xe^x - e^x)$$
$$= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x \cdots\cdots ②$$

〔2〕

解　答

$0 \leqq t \leqq x$ のとき $e^{-|t-x|} = e^{t-x}$
$x \leqq t \leqq 1$ のとき $e^{-(t-x)} = e^{-t+x}$ であるから

$$\int_0^1 e^{-|t-x|} t(1-t)\,dt = \int_0^x e^{t-x} t(1-t)\,dt + \int_x^1 e^{-t+x} t(1-t)\,dt$$

$$\int_0^x e^{t-x} t(1-t)\,dt = e^{-x}\int_0^x te^t dt - e^{-x}\int t^2 e^t dt$$
$$= e^{-x}\left[-t^2 e^t + 3te^t - 3e^t\right]_0^x$$
$$= e^{-x}(-x^2 e^x + 3xe^x - 3e^x + 3)$$

$$\int_x^1 e^{-t+x} t(1-t)\,dt = e^x\int_x^1 te^{-t} - t^2 e^{-t} dt$$
$$= e^x\left[t^2 e^{-t} + te^{-t} + e^{-t}\right]_x^1$$
$$= e^x(-x^2 e^{-x} - xe^x - e^{-x} + 3e^{-1})$$

$\therefore\quad f(x) = 3(e^{-x} + e^{x-1}) - 2(x^2 - x + 2)$
$f'(x) = 3(-e^{-x} + e^{x-1}) - 2(2x - 1)$
$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ であり符号が＋ → －へ変化するので，
$x = \dfrac{1}{2}$ で極大値をとる。

極大値は

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = 3\left(e^{-\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}}\right) - 2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 2\right) = 6e^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}$$

来月号では，愛知医科大学医学部の数学を攻略しますので，ご期待ください！
全12校の掲載予定は以下のとおりとなっております。

第61回／4月号　東邦大学医学部
第62回／5月号　東京女子医科大学
第63回／6月号　金沢医科大学
第64回／7月号　岩手医科大学医学部
第65回／8月号　北里大学医学部
第66回／9・10月合併号　日本大学医学部
第67回／10月臨時増刊号　聖マリアンナ医科大学
第68回／11月号　愛知医科大学医学部
第69回／12月号　東京医科大学
第70回／1・2月合併号　杏林大学医学部
第71回／3月増刊号　東京慈恵会大学
第72回／3月号　昭和大学医学部