東大螢雪会 **医 学 部 数 学** 攻略演習

マンツーマン指導で医歯薬学部に多くの合格者を輩出している「東大螢雪会」では，主要な私立大学医学部の予想問題を作成しています。このコーナーでは，「東大螢雪会」の作成した予想問題を用いて，主要な私立大学医学部の数学を攻略するための演習を行います。毎号１校分の演習を行い，全12校の連載となる予定です。

今月号では，杏林大学医学部の数学を攻略します！

第58回 杏林大学医学部 編

東大螢雪会講師　小池　淳

杏林大学医学部の数学は，制限時間60分で全問とも誘導付きの大問という構成です。幅広い分野からの出題となっており，標準的な問題が多いのが特徴です。ただし，誘導にうまく従って手早く処理をしないと時間切れになる恐れもあります。今回の予想問題では７割程度の得点率を目指して下さい。

$\boxed{1}$

O を原点とする xy 平面上の 3 点を A$(1,2)$，B$(2,1)$，C$(1,1)$がある。
点 P を
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t(\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}})$　$\alpha+\beta=1$，$0\leqq\alpha\leqq1$，$0\leqq\beta\leqq1$，$1\leqq t$
および
$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|\leqq\sqrt{3}$
を満たす点とし，点 P が描く領域を D とする。
点 (x, y) が領域 D に含まれるとき，$x+2y$ の最大値，最小値を求めよう。

$x+2y=k$ とおくと，傾き $-\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$，$y$ 切片 $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}k$ の直線を表す。

線分 AB と $x+2y=k$ が交点をもつとき k は最大値 $\boxed{\text{オ}}$，最小値 $\boxed{\text{カ}}$ をとる。

$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=\sqrt{3}$ で表される領域 D の境界と $x+2y=k$ が接する点を Q とおくと，

$\tan\angle\mathrm{BCQ}=\boxed{\text{キ}}$ であるから，$\sin\angle\mathrm{BCQ}=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}$，$\cos\angle\mathrm{BCQ}=\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}$ となる。

点 Q の座標は

$\left(\boxed{\text{シ}}+\sqrt{\boxed{\text{ス}}}\cos\angle\mathrm{BCQ},\ \boxed{\text{セ}}+\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}\sin\angle\mathrm{BCQ}\right)$ と表せる。

このときの k の値は $\boxed{\text{タ}}+\sqrt{\boxed{\text{チ}}}$ となる。

以上より求める最大値は $\boxed{\text{タ}}+\sqrt{\boxed{\text{チ}}}$，最小値は $\boxed{\text{カ}}$ とわかる。

$\boxed{2}$

正の数の列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ が次の関係式を満たしている。

$a_1=1$

$(n-1)\,a_n{}^2=na_{n-1}{}^2\quad (n=2, 3, 4\cdots)$

$b_n=\dfrac{a_n{}^2}{a_{n-1}{}^2}$ とおくと，$b_n=\dfrac{n}{n-\boxed{\text{ア}}}$ である。

$b_2b_3b_4\cdots b_n=\boxed{\text{イ}}\,n$ となる。

このことより，$a_n=\sqrt{\boxed{\text{ウ}}\,n}$ である。

$\displaystyle\sum_{n=1}^{N}(a_{n+1}-a_n)=\sqrt{\boxed{\text{エ}}N+\boxed{\text{オ}}}-\boxed{\text{カ}}$ であるから

$\displaystyle\sum_{n=1}^{N}(a_{n+1}-a_n)$ が自然数で，$\displaystyle\sum_{n=1}^{N}a_n{}^2$ が 5 ケタの自然数となるような最小の自然数 N は

$N=\boxed{\text{キクケ}}$ である。

また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\boxed{\text{コ}}$ である。

$\boxed{3}$

サイコロ 2 個を同時に投げたときに 2 個とも 1 の目が出る事象を A とする。

サイコロ 2 個を 1 回投げたときに，事象 A が起こる確率は $P(A)=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$ である。

サイコロ 2 個を n 回投げたときに，事象 A が少なくとも 1 回起こる確率は

$\boxed{\text{エ}}-\left(\dfrac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キク}}}\right)^n$ である。

したがって，事象 A が少なくとも 1 回起こる確率が $\dfrac{1}{2}$ 以上とするためにはサイコロを $\boxed{\text{ケコ}}$ 回以上投げなければならない。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$，$\log_{10}7=0.8451$ とせよ。

$\boxed{4}$

O を原点とする xy 平面上に，

円 $C: x^2+y^2=2$

放物線 $P: y=x^2$

がある。

円 C と放物線 P の交点を Q，Q$'$ とすると，$\mathrm{Q}\left(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}}\right)$，$\mathrm{Q}'\left(-\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}}\right)$ であるから，$\angle\mathrm{QOQ}'=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\pi$ である。

$x^2+y^2 \leqq 2$，$y \geqq x^2$ の条件を満たす領域の面積は $S=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\pi+\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。

$x^2+y^2 \leqq 2$，$y \geqq x^2$，$x^2+(y-2)^2 \geqq 2$ を満たす領域を R とする。領域 R の面積は

$T=-\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\pi+\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ であり，領域 R を y 軸の周りに回転してできる立体の体積は

$V=\left(\dfrac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{タ}}}-\dfrac{\boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}}{\boxed{\text{テ}}}\right)\pi$ となる。

$\boxed{1}$

解　答

領域 D は直線OA，OB，ABと点Cを中心とする円で囲まれた図形であり

右図のようになる。

$x+2y=k$ は $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}k$ より

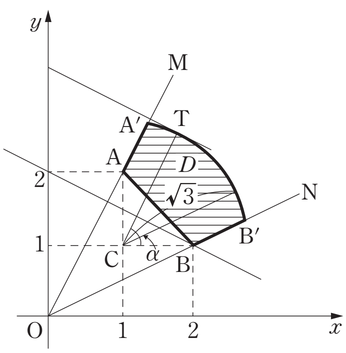
傾き $-\dfrac{1}{2}$，

y 切片 $\dfrac{1}{2}k$ の

直線を表す。

直線が点Aを通るとき最大

点Bを通るとき最小となるから，



最大値は $k=1+2\times2=5$

最小値は $k=2+2\times1=4$

となる。

直線が円弧と接するとき接線と半径は垂直となるが，直線の傾きが $-\dfrac{1}{2}$ であることから半径が x 軸となす傾きは2となる。

したがって，$\tan\angle\mathrm{BCQ}=2$ である。

これより，$\sin\angle\mathrm{BCQ}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\angle\mathrm{BCQ}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

である。

点Qは点Cを中心とする半径 $\sqrt{3}$ の円上にあるから $(1+\sqrt{3}\cos\angle\mathrm{BCQ}, 1+\sqrt{3}\sin\angle\mathrm{BCQ})$ と表せるから，$\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, 1+\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)$ である。

この点を通るときの k の値は

$k=\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)+2\left(1+\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)=3+\sqrt{15}$ である。

したがって，最大値は $3+\sqrt{15}$，最小値4となる。

$\boxed{2}$

解　答

$(n-1)a_n{}^2=na_{n-1}{}^2$ より

$$\frac{a_n{}^2}{a_{n-1}{}^2}=\frac{n}{n-1}$$

$b_n=\dfrac{a_n{}^2}{a_{n-1}{}^2}$ とおくと，$b_n=\dfrac{n}{n-1}$ である。

$$\begin{aligned}b_2b_3b_4\cdots b_n&=\frac{2}{2-1}\,\frac{3}{3-1}\,\frac{4}{4-1}\cdots\frac{n-1}{(n-1)-1}\,\frac{n}{n-1}\\&=\frac{2}{1}\,\frac{3}{2}\,\frac{4}{3}\cdots\frac{n-1}{n-2}\,\frac{n}{n-1}\\&=n\end{aligned}$$

となる。

また，$b_n=\dfrac{a_n{}^2}{a_{n-1}{}^2}$ より

$$b_2b_3b_4\cdots b_n=\frac{a_2{}^2}{a_1{}^2}\,\frac{a_3{}^2}{a_2{}^2}\,\frac{a_4{}^2}{a_3{}^2}\cdots\frac{a_{n-1}{}^2}{a_{n-2}{}^2}\,\frac{a_n{}^2}{a_{n-1}{}^2}=\frac{a_n{}^2}{a_1{}^2}$$

ここで，$a_1=1$ だから，

$\dfrac{a_n{}^2}{a_1{}^2}=a_n{}^2=n$ となる。

このことより，$a_n=\sqrt{n}$ である。

$$\sum_{n=1}^{N}(a_{n+1}-a_n)=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{N+1}-a_N)$$
$$=a_{N+1}-a_1$$
$$=\sqrt{N+1}-1$$

である。

$\displaystyle\sum_{n=1}^{N}{a_n}^2=\sum_{n=1}^{N}n=\frac{N(N+1)}{2}$ より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{N}{a_n}^2$ が 5 ケタの自然数となるのは

$\dfrac{N(N+1)}{2}\geqq 10^4$ のときであるから，

$N(N+1)\geqq 2\times 10^4$

$(N+1)^2\geqq N(N+1)\geqq 2\times 10^4$

$N+1\geqq 100\sqrt{2}>141$

より $N>140$ である。

$N=143$ のとき $143+1=144=12^2$ となるから，

条件を満たす最小の自然数 N は

$N=143$ である。

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$$

である。

3

解　答

サイコロ 2 個を 1 回投げたときに事象 A が起こるのは 2 個のサイコロの目がともに 1 のときだから，確率は

$P(A)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{36}$ である。

サイコロ 2 個を n 回投げたときに事象 A が 1 回も起こらない確率は

$$\left\{1-\left(\frac{1}{6}\right)^2\right\}^n=\left(\frac{35}{36}\right)^n$$

したがって，サイコロ 2 個を n 回投げたときに，事象 A が少なくとも 1 回起こる確率は

$1-\left\{1-\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\right\}^n=1-\left(\dfrac{35}{36}\right)^n$ である。

この確率が $\dfrac{1}{2}$ 以上となるから，

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^n\geqq\frac{1}{2}$$
$$\left(\frac{35}{36}\right)^n\leqq\frac{1}{2}$$

両辺の常用対数をとると

$$\log_{10}\left(\frac{35}{36}\right)^n\leqq\log_{10}\frac{1}{2}$$
$$n(\log_{10}35-\log_{10}36)\leqq\log_{10}1-\log_{10}2$$
$$n\left\{\log_{10}\left(\frac{7\times 10}{2}\right)-\log_{10}2^2\times 3^2\right\}\leqq-\log_{10}2$$
$$n\{\log_{10}7+1-\log_{10}2-2\log_{10}2-2\log_{10}3\}\leqq-\log_{10}2$$
$$n\{\log_{10}7+1-3\log_{10}2-2\log 3\}\leqq-\log_{10}2$$
$$(0.8451+1-3\times 0.3010-2\times 0.4771)\,n\leqq-0.3010$$
$$-0.0121n\geqq-0.3010$$
$$n\geqq\frac{0.3010}{0.0121}=24.8\cdots$$

したがって，サイコロ 2 個を25回以上投げなければならない。

4

解　答

円 $C: x^2+y^2=2$ と放物線 $P: y=x^2$ を連立して

$x^4+x^2-2=0$

$(x^2+2)(x-1)(x+1)=0$

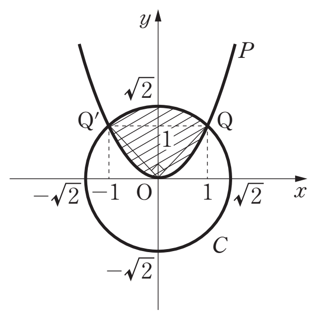
交点の x 座標は実数であるから，$x=\pm 1$

したがって，Q$(1,1)$，Q$'(-1,1)$ である。

ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1,1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}=(-1,1)$ より

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}=0$ となるから，$\angle\mathrm{QOQ'}=\dfrac{1}{2}\pi$ である。

$x^2+y^2\leqq 2$，$y\geqq x^2$ の条件を満たす領域は右図の斜線部分のようになる。



求める面積 S は

$S=$ 扇形 OQQ$'+2$

（直線OQと放物線Pで囲まれた図形）

となるから

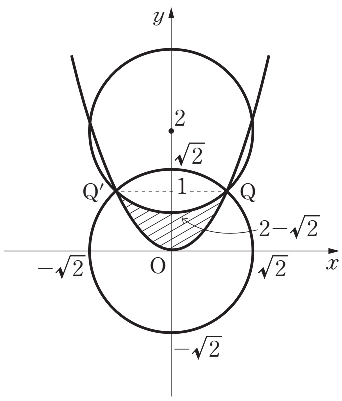
$$S=\frac{1}{4}(\pi\sqrt{2}^2)+2\int_0^1(x-x^2)\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}+2\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}$$

である。

領域Rは右図の斜線部分のようになる。



この面積Tは

$T=S-2$（劣弧QQ′と弦QQ′で囲まれた図形）

となるから，

$$T=\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\right)-2\left\{\frac{1}{4}(\pi\sqrt{2}^2)-\frac{1}{2}\times2\times1\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}-\pi+2$$

$$=\frac{7}{3}-\frac{1}{2}\pi$$

である。

領域Rをy軸の周りに回転してできる立体の体積Vは

$V=\pi\int_0^1(\sqrt{y})^2\,dy-\pi\int_{2-\sqrt{2}}^1\{2-(y-2)^2\}\,dy$ となる。

ここで，$\int_{2-\sqrt{2}}^1\{2-(y-2)^2\}\,dy=\int_1^{\sqrt{2}}(2-y)^2\,dy$

だから

$$V=\pi\int_0^1(\sqrt{y})^2\,dy-\pi\int_1^{\sqrt{2}}(2-y)^2\,dy$$

$$=\pi\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1-\pi\left[2y-\frac{y^3}{3}\right]_1^{\sqrt{2}}$$

$$=\pi\left(\frac{1}{2}\right)-\pi\left(2\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}-2+\frac{1}{3}\right)$$

$$=\left(\frac{13}{6}-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)\pi$$

である。

来月号では，東京慈恵会医科大学の数学を攻略しますので，ご期待ください！

全12校の掲載予定は以下のとおりとなっております。

第49回／４月号　東邦大学医学部
第50回／５月号　東京女子医科大学
第51回／６月号　金沢医科大学
第52回／７月号　岩手医科大学医学部
第53回／８月号　北里大学医学部
第54回／９・10月合併号　日本大学医学部
第55回／10月増刊号　聖マリアンナ医科大学
第56回／11月号　愛知医科大学
第57回／12月号　東京医科大学
第58回／１・２月合併号　杏林大学医学部
第59回／３月増刊号　東京慈恵会医科大学
第60回／３月号　昭和大学医学部