東大螢雪会 医学部数学 攻略演習

マンツーマン指導で医歯薬学部に多くの合格者を輩出している「東大螢雪会」では，主要な私立大学医学部の予想問題を作成しています。このコーナーでは，「東大螢雪会」の作成した予想問題を用いて，主要な私立大学医学部の数学を攻略するための演習を行います。毎号１校分の演習を行い，全12校の連載となる予定です。

今月号では，聖マリアンナ医科大学の数学を攻略します！

第55回 聖マリアンナ医科大学 編

東大螢雪会講師　小池　淳

聖マリアンナ医科大学の数学は，制限時間75分で小問集合と大問から出題がされることが多いのですが，出題形式は必ずしも一定していません。難問はなく，粒揃いで良問が多い印象です。合格には７割程度の得点率が必要でしょう。今回の予想問題でも７割程度の得点率を目指して下さい。

1 以下の設問〔1〕～〔3〕の $\boxed{①}$ ～ $\boxed{⑦}$ に答えなさい。

〔1〕x を -1 より大きな実数とし，$f(x)=\dfrac{(x+2)^2}{x+1}$ とする。このとき，$f(x)$ は $x=\boxed{①}$ のとき最小値 $\boxed{②}$ をとる。

〔2〕整数 a，b が $\log(a+2b)+\log\dfrac{1}{a}+\log\dfrac{1}{b}=0$ を満たすとき a，b の組み合わせは全部で $\boxed{③}$ 組ある。このうち a が最大になる組み合わせは $a=\boxed{④}$，$b=\boxed{⑤}$ である。

〔3〕辺 AB＝3，AC＝5，BC＝$2\sqrt{7}$ である三角形 ABC がある。辺 AC を $k:1-k$ に内分する点を D とし，∠BAC の二等分線と辺 BC との交点を E とする。さらに，直線 AE と直線 BD の交点を F とする。ただし，$0<k<1$ とする。
AE⊥BD のとき $k=\boxed{⑥}$ であり，四角形 ECDF の面積は三角形 ABC の面積の倍 $\boxed{⑦}$ となる。

2 t を正の実数とし，放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ 上の点 $\left(t,\dfrac{1}{4}t^2\right)$ を中心とし，x 軸に接している円 O_t がある。このとき，以下の問いに答えなさい。

〔1〕円 O_t を表す方程式を求めなさい。

〔2〕点 $(a,\ b)$ を通る円 O_t が存在するための a と b が満たす条件を求めなさい。ただし，a と b は正の実数とする。

〔3〕xy 平面の第1象限（$x>0$かつ$y>0$の部分）内で，いかなる正の実数 t に対しても円 O_t が通過しない領域を求め，それを図示しなさい。

3 kを実数とし，直線 $L: y=kx+1$ とする。また，双曲線 $H: \dfrac{x^2}{3}-y^2=1$ とする。

以下の設問の ① ～ ⑰ に答えなさい。

〔1〕L は k によらない定点 P_0（①，②）を通る。P_0 と双曲線 H 上の点（x，y）との距離が最小になるのは（x，y）=（ ③ ， ④ ）または（ ⑤ ， ⑥ ）のときである。（ただし， ③ < ⑤ とする。）このときの距離の最小値は ⑦ である。

〔2〕直線 L が双曲線 H に接するための k の条件は，$k=$ ⑧ ， ⑨ であり，直線 L と双曲線 H が共有点を2つもつための条件は， ⑩ $<k<$ ⑪ ， ⑪ $<k<$ ⑫ ， ⑫ $<k<$ ⑬ である。

〔3〕直線 L と双曲線 H が共有点を2つもつとき，2つの共有点の中点の座標は（ ⑭ ， ⑮ ）である。$x\neq 0$ とすると，この中点は，方程式 ⑯ によって定義される曲線の上を動く。この中点が，点 P_0 と一致するのは，$k=$ ⑰ のときである。

4 関数 $f(x)=xe^{-x^2}$ について，以下の設問〔1〕～〔3〕に答えなさい。

ただし，$\lim_{x\to\infty} xe^{-x^2}=0$, $\lim_{x\to\infty} xe^{-x^2}=0$ は用いてよい。

〔1〕$y=f(x)$ の増減，凹凸などを調べ，グラフの概形をかきなさい。

〔2〕点 $P(a, f(a))$ における $y=f(x)$ のグラフの接線の方程式を求めなさい。

また，この接線が点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ を通るときの a の値を求めなさい。

〔3〕曲線 $y=f(x)$ と，2直線 $x=-1$，$x=1$ と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めなさい。

解　答

1

〔1〕

$\dfrac{(x+2)^2}{x+1}$ の分子を $x+1$ で割ると，

$$\frac{(x+2)^2}{x+1}=\frac{x^2+4x+4}{x+1}$$
$$=\frac{(x+1)^2+2(x+1)+1}{x+1}$$
$$=(x+1)+\frac{1}{x+1}+2$$

相加相乗平均より

$$\frac{(x+2)^2}{x+1}\geqq 2\sqrt{(x+1)\frac{1}{x+1}}+2=4$$

等号成立は $x+1=\dfrac{1}{x+1}$

$\Leftrightarrow (x+1)^2=1$

$\therefore x>-1$ より $x=0$

$\therefore$ 最小値4（$x=0$のとき）

〔2〕

$$\log(a+2b)+\log\frac{1}{a}+\log\frac{1}{b}=\log\left(\frac{a+2b}{ab}\right)$$

与式$=0$ となるのは，$\dfrac{a+2b}{ab}=1$ が成立する。

したがって，

$ab-a-2b=0$

$(a-2)(b-1)=2$

$(a-2,\ b-1)=(1,2),\ (2,1),\ (-1,-2),\ (-2,-1)$

$(a,\ b)=(3,3),\ (4,2),\ (1,-1),\ (0,0)$

となる。

真数条件より $a+2b>0,\ \dfrac{1}{a}>0,\ \dfrac{1}{b}>0$ だから

$(x,\ y)=(3,3),\ (4,2)$

したがって，全部で 2 組であり a が最大になる組み合わせは $a=4,\ b=2$ である。

〔3〕

$\left|\overrightarrow{BC}\right|=2\sqrt{7}$ より

$\left|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right|^2=(2\sqrt{7})^2$

$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=28$

$9-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+25=28$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$

点 D は辺 AC を $k:1-k$ に内分する点より

$\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AC}$

線分 AEは∠BACの二等分線より l を実数として

$\overrightarrow{AE}=l\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{3}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{5}\right)$

また，点 E は辺 BC 上の点であるから

$\dfrac{l}{3}+\dfrac{l}{5}=1$

$\therefore l=\dfrac{15}{8}$

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=0$

$\left(\dfrac{5}{8}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{8}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}\right)=0$

$\dfrac{1}{8}\left\{-5\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+(5k-3)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+3k\left|\overrightarrow{AC}\right|^2\right\}=0$

$\dfrac{1}{8}\{-45+3(5k-3)+75k\}=0$

$\dfrac{1}{8}\{-54+90k\}=0$

$\therefore k=\dfrac{3}{5}$

三角形 ABC の面積を S とすると

三角形 ABDの面積は$kS=\dfrac{3}{5}S$

三角形 ABEの面積が $\dfrac{3}{3+5}S=\dfrac{3}{8}S$ より

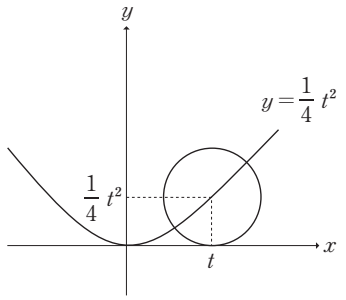
三角形 AFEの面積は$(1-m)\dfrac{3}{8}S=\dfrac{3}{40}S$ である。

四角形 ECDFの面積は$S-\dfrac{3}{5}S-\dfrac{3}{40}S=\dfrac{13}{40}S$

したがって，$\dfrac{13}{40}$ 倍

$\boxed{2}$

〔1〕



右図より半径は

$\dfrac{1}{4}t^2$ である。

よって

円 $0t$ の

方程式は

$(x-t)^2+\left(y-\dfrac{1}{4}t^2\right)^2=\left(\dfrac{1}{4}t^2\right)^2$

〔2〕点$(a,\ b)$を通るから $0t$ の式に代入して

$(a-t)^2+\left(b-\dfrac{1}{4}t^2\right)^2=\left(\dfrac{1}{4}t^2\right)^2$

t について整理すると

$\left(1-\dfrac{b}{2}\right)t^2-2at+a^2+b^2=0$

$f(t)=\left(1-\dfrac{b}{2}\right)t^2-2at+a^2+b^2=0$ とおくと

$f(t)=0$ となる正の実数 t が存在することが条件である。

(i) $1-\dfrac{b}{2}=0\quad(b=2)$ のとき

$f(t)$ は 1 次式となる。

$f(t)=-2at+a^2+b^2$

$a\neq0$ であれば実数解をもつ。

(ii) $1-\dfrac{b}{2}\neq0\quad(b\neq0)$ のとき

$f(t)=0$ となる 2 次方程式が正の実数解をもとことが条件となる。

$f(t)$ を平方完成とすると

$f(t)=\left(\dfrac{2-b}{2}\right)\left(t-\dfrac{2a}{2-b}\right)^2+a^2+b^2-\dfrac{2a^2}{2-b}$

となり $\dfrac{2a}{2-b}$，$a^2+b^2-\dfrac{2a^2}{2-b}$

を頂点とする2次関数の

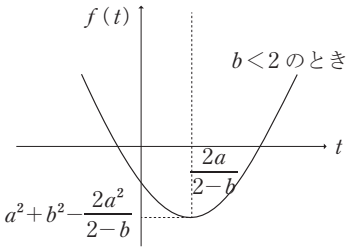
グラフとなる

$\dfrac{2-b}{2}$ の正負で

グラフの形が

変わるから

場合分けして



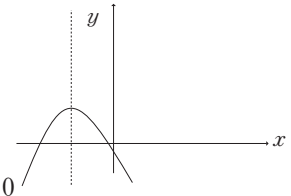
(ア)　$b>2$ のときは上に凸のグラフとなり

t が正の解をもたない条件は

$a^2+b^2-\dfrac{2a^2}{2-b}<0$

または $\dfrac{2a}{2-b}<0$かつ$f(0)<0$

である。



$a^2+b^2-\dfrac{2a^2}{2-b}<0$ は

$2-b<0$ より

$(a^2+b^2)(2-b)-2a^2>0$

$b(a^2+b^2-2b)<0$

$b>0$かつ$a^2+b^2-2b<0$

または

$b<0$ かつ $a^2+b^2-2b>0$ となるが

$b>2$ であるから

$a^2+b^2-2b<0$ が条件となる

$\dfrac{2a}{2-b}<0$かつ$f(0)<0$ は

$a>0$ かつ $a^2+b^2<0$

であるが $a^2+b^2\geqq 0$ より不適

(イ)　$b<2$ のときは下に凸のグラフになり

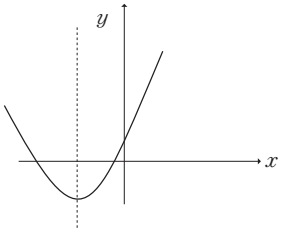
t が正の解をもたない条件は

$a^2+b^2-\dfrac{2a^2}{2-b}>0$

または

$\dfrac{2a}{2-b}<0$ かつ

$f(0)>0$ である



$a^2+b^2-\dfrac{2a^2}{2-b}>0$は(ア)と同様に考えて

$b>0$ かつ $a^2+b^2-2b>0$

または

$b<0$ かつ $a^2+b^2-2b>0$

$b<2$ より

$0<b<2$ かつ $a^2+b^2-2b>0$

または $b<0$ かつ $a^2+b^2-2b<0$

$\dfrac{2a}{2-b}<0$ かつ $f(0)>0$ は

$a<0$ かつ $a^2+b^2>0$ となり

$a<0$ であれば $a^2>0$ であるから

$a<0$ が条件となる。

以上まとめると

$2<b$

または

$b=2$ かつ $a\neq 0$

または

$0<b<2$ かつ $a^2+b^2-2b>0$

または

$b<0$ かつ $a<0$

となる

〔3〕〔2〕の逆であるから

$0<a$ かつ $a^2+b^2-2b<0$ となる

したがって

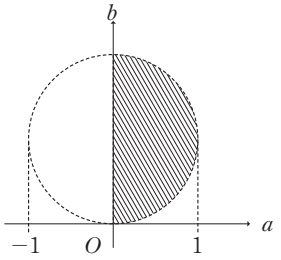
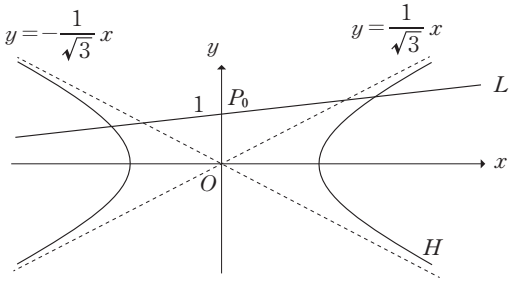


図1の斜線部分

ただし境界は含まない。

$\boxed{3}$

〔1〕



$L: y=kx+1$ より，L は定点 $P_0(0,\ 1)$ を通る。
H 上の点を $P(x,\ y)$ とすると，$x^2=3(y^2+1)$ より，

$$PP_0{}^2=x^2+(y-1)^2=3(y^2+1)+(y-1)^2$$
$$=4y^2-2y+4=4\left(y-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{4}$$

PP_0 は $y=\dfrac{1}{4}$ のとき最小で，このとき，

$$(x,\ y)=\left(\frac{\sqrt{51}}{4},\ \frac{1}{4}\right) \text{または} \left(-\frac{\sqrt{51}}{4},\ \frac{1}{4}\right)$$

また，このとき P_0 と点 $(x,\ y)$ との距離は $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

〔2〕

L と H の方程式から y を消去して整理すると
$(1-3k^2)x^2-6kx-6=0$ …①
(i)（①の x^2 の係数）$=0$ のときは L が H に接しないが，共有点を1個のみもつ。このときの条件は，$k=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(ii) $k\neq\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき①式は x の2次方程式となり，その判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=9k^2+6(1-3k^2)$$
$$=3(2-3k^2)$$

(ア) $k=\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ のとき①は重解をもち，L と H は接する。

L と H が接する条件は $k=\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

(イ) $k\neq\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ かつ $-\sqrt{\dfrac{2}{3}}<k<\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ のとき①は相異なる2つの実数解をもつ。
L と H が相異なる2つの共有点をもつ条件は

$$-\sqrt{\frac{2}{3}}<k<-\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}<k<\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}<k<\sqrt{\frac{2}{3}}$$

〔3〕

L と H が相異なる2つの共有点をもつとき，①の2解を $\alpha,\ \beta$ とすると，解と係数の関係により $\alpha\beta=\dfrac{6k}{1-3k^2}$ であり，2つの共有点は $(\alpha,\ k\alpha+1)$，$(\beta,\ k\beta+1)$ と表される。中点を $(x,\ y)$ とすると，

$$(x,\ y)=\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{\alpha+\beta}{2}k+1\right)=\left(\frac{3k}{1-3k^2},\ \frac{3k^2}{1-3k^2}+1\right)$$

中点が $P_0(0,\ 1)$ と一致する条件は $\dfrac{3k}{1-3k^2}=0$

すなわち $k=0$
また，$k\neq0$ のとき $x\neq0$ であり

$\dfrac{y-1}{x}=k$ これと $x=\dfrac{3k}{1-3k^2}$ より

$$x=\frac{3\dfrac{y-1}{x}}{1-3\left(\dfrac{y-1}{x}\right)^2}=\frac{3x(y-1)}{x^2-3(y-1)^2}$$

$x\{x^2-3(y-1)^2\}=3x(y-1)$
$x\neq0$ より
$x^2-3(y-1)^2=3(y-1)$
$x^2-(3y^2-3y)=0$

$$x^2-3\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{3}{4}$$

$$\frac{x^2}{\dfrac{3}{4}}-\frac{\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2}{4}=-1$$

したがって中点は方程式 $\dfrac{x^2}{\dfrac{3}{4}}-\dfrac{\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2}{4}=-1$ によって定義される曲線の上を動く。

4

〔1〕

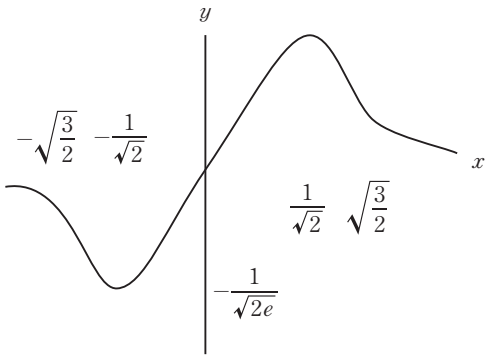
$f'(x)=e^{-x^2}(1-2x^2)$
$f''(x)=e^{-x^2}(4x^3-6x)$ より増減表は次のようになる

x		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		$-\sqrt{\frac{1}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{1}{2}}$		$\sqrt{\frac{3}{2}}$	
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	⤵	$-\frac{\sqrt{3}}{e\sqrt{2e}}$	⤷	$-\frac{1}{\sqrt{2e}}$	⤴	0	↱	$\frac{1}{\sqrt{2e}}$	⤵	$\frac{\sqrt{3}}{e\sqrt{2e}}$	⤷

また $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$

よって、

グラフの概形は次のようになる。



〔2〕P$(\alpha,\ f(\alpha))$における接線の方程式は，

$y-\alpha e^{-\alpha^2}=e^{-\alpha^2}(1-2\alpha^2)(x-\alpha)$，よって，

求める接線の方程式は，

$y=e^{-\alpha^2}(1-2\alpha^2)x+2\alpha^3e^{-\alpha^2}$ である。

$(x,\ y)=\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$ 代入すると，

$0=e^{-\alpha^2}(1-2\alpha^2)\left(-\frac{1}{2}\right)+2\alpha^3e^{-\alpha^2}$ より，

$4\alpha^3+2\alpha^2-1=0 \Leftrightarrow (2\alpha-1)(2\alpha^2+2\alpha+1)=0$，

よって，

$\alpha=\frac{1}{2}$ となる。

〔3〕求める面積 $S=2\int_0^1 xe^{-x^2}dx$，である

$-x^2=t$ おくと，$S=\int_{-1}^{0}e^t dt=[e^t]_{-1}^{0}=1-\frac{1}{e}$ である。

来月号では，愛知医科大学の数学を攻略しますので，ご期待ください！

全12校の掲載予定は以下のとおりとなっております。

第49回／４月号　東邦大学医学部
第50回／５月号　東京女子医科大学
第51回／６月号　金沢医科大学
第52回／７月号　岩手医科大学医学部
第53回／８月号　北里大学医学部
第54回／９・10月合併号　日本大学医学部
第55回／10月増刊号　聖マリアンナ医科大学
第56回／11月号　愛知医科大学
第57回／12月号　東京医科大学
第58回／１・2月合併号　杏林大学医学部
第59回／３月増刊号　東京慈恵会医科大学
第60回／３月号　昭和大学医学部

「東大螢雪会」では，本誌をご覧の方々の学力アップのために，主要な私立大学医学部の予想問題を無料でプレゼントしています。ご希望の方は，「東大螢雪会」のホームページ（http://www.keisetsukai.com）（PC・携帯）からお問い合わせください。