東大螢雪会 医学部数学 攻略演習

マンツーマン指導で医歯薬学部に多くの合格者を輩出している「東大螢雪会」では，主要な私立大学医学部の予想問題を作成しています。このコーナーでは，「東大螢雪会」の作成した予想問題を用いて，主要な私立大学医学部の数学を攻略するための演習を行います。毎号１校分の演習を行い，全12校の連載となる予定です。

今月号では，北里大学医学部の数学を攻略します！

第53回 北里大学医学部 編

東大螢雪会講師　小池　淳

北里大学医学部の数学は，制限時間80分で1が小問集合，2，3が大問という構成で大問２題はほぼ例外なく行列と微積分から出題されています。全体的に素直な出題が多いのですが，年によっては微積分で手ごわい出題もあります。新課程では行列の代わりに何が出題されるのか予想が難しいところですが，今回の予想問題では新旧課程共通である２次曲線から出題しました。７割程度の得点率を目指して下さい。

1 次の $\boxed{}$ に当てはまる答を解答欄に記せ。

(1) 三角形 ABC において BC $=a$，CA $=b$，AB $=c$ とし，$\dfrac{a+b}{7}=\dfrac{b+c}{8}=\dfrac{c+a}{9}$ が成立している。

(i) このとき，$\sin A=$ $\boxed{（ア）}$ である。

(ii) 三角形 ABC の面積が30となるとき $a=$ $\boxed{（イ）}$ である。

(2) 点 $(0,\ 0)$ と直線 $3x+5x=40$ までの距離は $\boxed{（ウ）}$ である。

a，b を整数とし，点 $(a,\ b)$ が xy 平面上の原点を中心として半径６の円内を動くとき，点 $(a,\ b)$ と $3x+5x=40$ までの距離の最小値は $\boxed{（ウ）}$ である。

(3) １から９までの数字を１つずつ書いた９枚のカードがある。この９枚のカードから３枚を取り出す。

(i) 取り出した３枚のカードの中に８と９が書かれたカードがともにある確率は $\boxed{（ウ）}$ である。

(ii) 取り出した３枚のカードの数字の和が残りのカードの数字の和より大きくなる確率は $\boxed{（エ）}$ である。

(4) 条件 $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3a_n-2}$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ がある。

(i) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とすると，$b_{n+1}=$ $\boxed{（イ）}$ b_n+ $\boxed{（イ）}$ が成り立ち，数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=$ $\boxed{（イ）}$ で与えられる。

(ii)　$|a_n| < \dfrac{1}{2014}$ を満たす最小の n は $n=$ $\boxed{\quad（オ）\quad}$ である。

$\boxed{2}$　楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上に 2 つの動点 $\mathrm{P}(3\cos\theta,\ 2\sin\theta)$，$\mathrm{Q}(3\sin\theta,\ -2\cos\theta)$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ をとる。以下の問いに答えよ。

(1)　点 P，Q における楕円の接線 l_1，l_2 の方程式ならびに，直線 l_1，l_2 の交点 R の座標を θ を用いて求めよ。

(2)　θ を変化するとき，点 R の軌跡を表す方程式を求めよ。

(3)　点 R の軌跡により囲まれる部分の面積を求めよ。

$\boxed{3}$　$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ として，曲線 $C：y=\cos x$ と直線 $l_1：y=mx\,(0<m)$ の交点の x 座標を p とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　曲線 C，直線 l_1 および y 軸で囲まれた部分の面積 S_1 を p のみを用いて求めよ。

(2)　曲線 C，直線 l_1 および直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ で囲まれた部分の面積 S_2 を p のみを用いて求めよ。

(3)　S_1 と S_2 の和を最小とする p の値を求めよ。

$\boxed{1}$

$\boxed{\quad解\quad}$

(1)

(i)　$\dfrac{a+b}{7}=\dfrac{b+c}{8}=\dfrac{c+a}{9}=k$ とおいて

$a+b=7k$ …①

$b+c=8k$ …②

$c+a=9k$ …③

辺々足して

$2a+2b+2c=24k$

$\therefore\quad a+b+c=12k$ …④

④−①，④−②，④−③より

$a=4k$

$b=3k$

$c=5k$

したがって，

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$
$$=\frac{9k^2+25k^2-16k^2}{2\cdot3k\cdot5k}$$
$$=\frac{3}{5}$$

三角形の内角だから $\sin A>0$ より

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$$
$$=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}$$
$$=\frac{4}{5}$$

(ii)　三角形の面積は30であるから

$$30=\frac{1}{2}bc\sin A$$
$$=\frac{1}{2}3k\cdot5k\cdot\frac{4}{5}$$
$$=6k^2$$

$\therefore\quad k=\sqrt{5}$

$a=4k=4\sqrt{5}$

(2)

$$\frac{|3\cdot0+5\cdot0-40|}{\sqrt{3^2+5^2}}=\frac{|-40|}{\sqrt{34}}=\frac{40}{\sqrt{34}}$$

　ここで，点 $(a,\ b)$ と $3x+5x=40$ までの距離は

$$\frac{|3\cdot a+5\cdot b-40|}{\sqrt{3^2-5^2}}=\frac{|3a+5b-40|}{\sqrt{34}}$$

　となるから $|3a+5b-40|$ が最小となるとき点と直線の距離も最少となる。

$\frac{40}{\sqrt{34}}<6$ より直線 $3x+5x=40$ は原点を中心とする半径 6 の円と交点を持たないことから，$3a+5b=k$ とおくと，ab 平面上で円 $a^2+b^2=36$ と直線 $3a+5b=k$ が整数 a，b で交点を持つような $|k|$ の最大値を考えればよい。

原点と直線 $3a+5b=k$ の距離は半径以下であるから

$$\frac{|3\cdot 0+5\cdot 0-k|}{\sqrt{3^2+5^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{34}}\leqq 6$$

$|k|\leqq 6\sqrt{34}$

$5<\sqrt{34}<6$ であり，

k は整数だから $|k|\leqq 6\cdot 5=30$

したがって，求める距離の最小値は

$\frac{|30-40|}{\sqrt{3^2+5^2}}=\frac{10}{\sqrt{34}}$ である。

(3)

取り出したカード 3 枚の中に 8 と 9 が書かれたカードがともにあるときは残りの 1 枚を 1 ～ 7 までのカードから 1 枚取り出すことになるから、取り出し方は ${}_7C_1=7$ 通り。

したがって、求める確率は

$$\frac{{}_7C_1}{{}_9C_3}=\frac{7}{84}=\frac{1}{12}$$

9 枚のカードの数字の総和は

$1+2+3+\cdots\cdots+9=45$

よって、取り出した 3 枚のカードの数字の和が23以上で残りのカードの数字の和より大きくなる。

3 枚のカードの数字の和が23以上となる数字の組み合わせは

6， 8， 9 と 7， 8， 9 の 2 通りである。

したがって、求める確率は

$$\frac{2}{{}_9C_3}=\frac{2}{84}=\frac{1}{42}$$

(4)

$a_{n+1}=\frac{a_n}{3a_n-2}$ の両辺の逆数をとって

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3a_n-2}{a_n}$$

$$=3-\frac{2}{a_n}$$

すなわち

$b_{n+1}=-2b_n+3$

$(b_{n+1}-1)=-2(b_n-1)$ と変形できる。

ここで，$b_1-1=-\frac{1}{2}$ より

数列 $\{b_n-1\}$ は初項 $-\frac{1}{2}$，公比 -2 の等比数列である。

$$b_n-1=-\frac{1}{2}\cdot(-2)^{n-1}$$

$$b_n=-\frac{1}{2}\cdot(-2)^{n-1}+1$$

となる。

したがって，

$$a_n=\frac{1}{b_n}$$

$$=\frac{1}{-\frac{1}{2}\cdot(-2)^{n-1}+1}$$

$$=\frac{1}{(-2)^{n-2}+1}$$

$|a_n|<\frac{1}{2014}\iff |b_n|>2014$

$\iff\quad b_n<-2014\quad$ または $\quad 2014<b_n$

である。

$b_n<-2014$ より

$(-2)^{n-2}+1<-2014$

$(-2)^{n-2}<-2015$

ここで，

$(-2)^{11}=-2048<-2015<-1024=-(-2)^{10}$

$\therefore\quad 11\leqq n-2$

$13\leqq n$

また，$2014<b_n$ より

$2014<(-2)^{n-2}+1$

$2013<(-2)^{n-2}$

ここで

$(-2)^{10}=1024<2013<2048=-(-2)^{11}$

$\therefore\quad 12\leqq n-2$

$14 \leqq n$

以上より，条件を満たす最小の自然数は13である。

2

解

(1)

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(p,\ q)$ における

接線の方程式は，$\dfrac{px}{a^2}+\dfrac{qy}{b^2}=1$ である。

点 $\mathrm{P}(3\cos\theta,\ 2\sin\theta)$,

点 $\mathrm{Q}(3\sin\theta,\ -2\cos\theta)$ はともに楕円上の点

であるから

点 P における接線の方程式は，

$$\frac{(3\cos\theta)\,x}{9}+\frac{(2\sin\theta)\,y}{4}=1$$

すなわち $2\cos\theta x+3\sin\theta y=6$　…①

同様に点 Q における接線の方程式は，

$$\frac{(3\sin\theta)\,x}{9}+\frac{(-2\cos\theta)\,y}{4}=1$$

すなわち $2\sin\theta x-3\cos\theta y=6$　…②

となる。

よって，接線の交点 R の座標は①，②を連立

して ①×$\cos\theta$+②×$\sin\theta$ より

$(2\cos^2\theta+2\sin^2\theta)\,x=6\cos\theta+6\sin\theta$

$x=3\cos\theta+3\sin\theta$

①×$\sin\theta$−②×$\cos\theta$ より

$(3\sin^2\theta+3\cos^2\theta)\,y=6\sin\theta-6\cos\theta$

$y=2\sin\theta-2\cos\theta$

したがって，交点 R は

$(3\sin\theta+3\cos\theta,\ 2\sin\theta-2\cos\theta)$

(2)

$\mathrm{R}(x,\ y)$ から θ を消去して xy の関係式を導くと

$x=3\cos\theta+3\sin\theta$　…③

$y=2\sin\theta-2\cos\theta$　…④

③×2+④×3 より

$2x+3y=12\sin\theta$　…⑤

③×2−④×3 より

$2x-3y=12\cos\theta$　…⑥

⑤^2×⑥^2 より

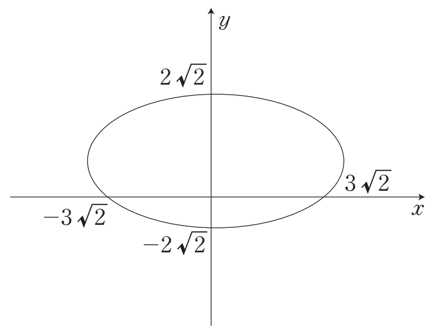
$(2x+3y)^2+(2x-3y)^2=12^2$

$8x^2+18y^2=12^2$

$$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$$

よって R の軌跡を表す方程式は

$\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{8}=1$ であり，



(3)

軌跡で囲まれる部分は楕円であり，この楕円の長

軸は $a=6\sqrt{2}$，短軸は $b=4\sqrt{2}$ である。

したがって，求める面積は

$S=ab\pi=12\pi$ である。

3

解

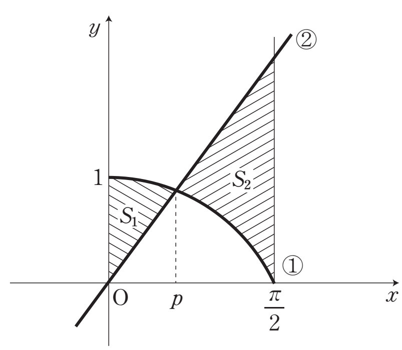
(1)　$C：y=\cos x$　…①

　　$l_1：y=mx\,(0<m)$　…②

①，②の交点の x 座標を p とするから

$\cos p=mp$

である。



$$S_1=\int_0^p(\cos x-mx)\,dx$$

$$=\left[\sin x-\frac{mx^2}{2}\right]_0^p$$

$$=\sin p-\frac{mp^2}{2}$$

$$=\sin p-\frac{p\cos p}{2}$$

(2)

$$S_2=\int_p^{\frac{\pi}{2}}(mx-\cos x)\,dx$$

$$=\left[\frac{mx^2}{2}-\sin x\right]_p^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left[\frac{x^2\cos p}{2p}-\sin x\right]_p^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left(\frac{\pi^2\cos p}{8p}-\sin\frac{\pi}{2}\right)-\left(\frac{p\cos p}{2}-\sin p\right)$$

$$=\frac{\pi^2\cos p}{8p}-\frac{p\cos p}{2}+\sin p-1$$

(3)

$$S_1+S_2=\sin p-\frac{p\cos p}{2}+\frac{\pi^2\cos p}{8p}-\frac{p\cos p}{2}+\sin p-1$$

$$=2\sin p-p\cos p+\frac{\pi^2\cos p}{8p}-1$$

$$f(p)=2\sin p-p\cos p+\frac{\pi^2\cos p}{8p}-1$$

とおく。

$$f'(p)=2\cos p-(\cos p-p\sin p)+\frac{\pi^2(-p\sin p-\cos p)}{8p^2}$$

$$=\cos p+p\sin p-\frac{\pi^2(p\sin p+\cos p)}{8p^2}$$

$$=(\cos p+p\sin p)\left(1-\frac{\pi^2}{8p^2}\right)$$

$0<t<\dfrac{\pi}{2}$ では $\cos p>0$, $\sin p>0$ より

$\cos p+p\sin p>0$

したがって，増減表は

p	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{1}{2}\pi$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	最小		↗

したがって，面積の和が最小となる p の値は

$$p=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

来月号では、日本大学医学部の数学を攻略しますので、ご期待ください！

全12校の掲載予定は以下のとおりとなっております。

第49回／４月号　東邦大学医学部
第50回／５月号　東京女子医科大学
第51回／６月号　金沢医科大学
第52回／７月号　岩手医科大学医学部
第53回／８月号　北里大学医学部
第54回／９・10月合併号　日本大学医学部
第55回／10月臨時増刊号　聖マリアンナ医科大学
第56回／11月号　愛知医科大学
第57回／12月号　東京医科大学
第58回／１・２月合併号　杏林大学医学部
第59回／３月増刊号　東京慈恵会医科大学
第60回／３月号　昭和大学医学部