東大螢雪会 医学部数学 攻略演習

マンツーマン指導で医歯薬学部に多くの合格者を輩出している「東大螢雪会」では，主要な私立大学医学部の予想問題を作成しています。このコーナーでは，「東大螢雪会」の作成した予想問題を用いて，主要な私立大学医学部の数学を攻略するための演習を行います。毎号１校分の演習を行い，全12校の連載となる予定です。

今月号では，岩手医科大学医学部の数学を攻略します！

第52回 岩手医科大学医学部 編

東大螢雪会講師　小池　淳

岩手医科大学医学部の数学は，制限時間60分で大問３題が出題されます。出題形式は必ずしも一定していませんが，制限時間に対してやや設問の数が多く，迅速な対応と正確な計算が要求されます。７割程度の得点率が必要でしょう。今回の予想問題でも７割程度の得点率を目指して下さい。

$\boxed{1}$ 大小２つのさいころを同時に投げる。２つのサイコロはどの目も等確率で出るものとする。大きいサイコロと小さいサイコロの出た目をそれぞれa，bとする。

不等式 $a\cdot 2^a \leqq 2^b \leqq 64$ について，以下の設問に答えよ。

(1) $a\cdot 2^a=64$ を満たす a の値は $\boxed{（ア）}$ である。

(2) $a=3$ のとき，不等式を満たす b の値は全部で $\boxed{（イ）}$ 個であり，このときの b の値の和は，$\boxed{（ウ）}$ である。

(3) 不等式を満たす b の値が全部で４個となる a の値は $\boxed{（エ）}$ である。

(4) a，b が不等式の解となる確率は $\dfrac{\boxed{（オ）}}{\boxed{（カ）}}$ となる。

$\boxed{2}$ aを実数とし，θ を $0\leqq\theta\leqq\pi$ とするとき以下の設問に答えよ。

(1) a の３次方程式 $4a^3+2a^2-2a-1=0$ の解は

$a=\pm\dfrac{\boxed{（ア）}}{\sqrt{\boxed{（イ）}}}$，$\dfrac{\boxed{（ウ）}}{\boxed{（エ）}}$ である。

(2) xy 平面上の原点を中心とする半径１の円 C を考える。x 軸の正方向から反時計回りにとった角を中心角 θ とする。円 C 上に中心角を θ, 2θ, 3θ とする３点をとり，それぞれ A, B, C とする。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が y 軸上の点となるとき，θ は $\cos\theta+\cos\boxed{（オ）}\theta+\cos\boxed{（カ）}\theta=0$ を満たす。

この式を $\cos\theta$ で表すと $\boxed{（キ）}\cos^3\theta+\boxed{（ク）}\cos^2\theta-\boxed{（ケ）}\cos\theta-1=0$ である。

したがって，θ の値は $\theta=\dfrac{\boxed{(コ)}}{\boxed{(サ)}}\pi$，$\dfrac{\boxed{(シ)}}{\boxed{(ス)}}\pi$，$\dfrac{\boxed{(セ)}}{\boxed{(ソ)}}\pi$ となる。

(3)　$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ が y 軸上の点となるとき，

$\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|$ の最大値は $\boxed{(タ)}+\sqrt{\boxed{(チ)}}$，最小値は $\boxed{(ツ)}$ となる。

$\boxed{3}$　円 $C_1: x^2-4x+y^2=0$，円 $C_2: x^2+y^2-4y=0$ があるとき，以下の設問に答えよ。

(1)　円 C_1，C_2 の交点は原点 O $(0,\ 0)$ と $\left(\boxed{(ア)},\ \boxed{(イ)}\right)$ である。

(2)　連立不等式 $\begin{cases} x^2-4x+y^2\leqq 0 \\ x^2+y^2-4y\leqq 0 \end{cases}$

の表す領域を D とする。領域 D の面積は $\boxed{(ウ)}\pi-\boxed{(エ)}$ である。

(3)　点 $(x,\ y)$ が領域内 D を動くとき，$-x+2y$ の最大値は $\boxed{(オ)}\sqrt{\boxed{(カ)}}-\boxed{(キ)}$ である。

(4)　a を $0<a<2$ を満たす定数とし，数列 $\{a_n\}$ を $a_1=a$，$a_{n+1}=\sqrt{{a_n}^2-4a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義する。

$x=a_n$ と円 C_1 の交点のうち正の y 座標が a_{n+1} となることから $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\boxed{(ク)}$ である。

$\boxed{1}$

解　法

サイコロで出た目と不等式の融合問題です。

まずは不等式に着目しましょう。

$$a\cdot 2^a\leqq 2^b\leqq 64=2^6$$

$a\cdot 2^a\geqq 0$ に注意して不等式の底を 2 とした対数をとると

$$a+\log_2 a\leqq b\leqq 6$$

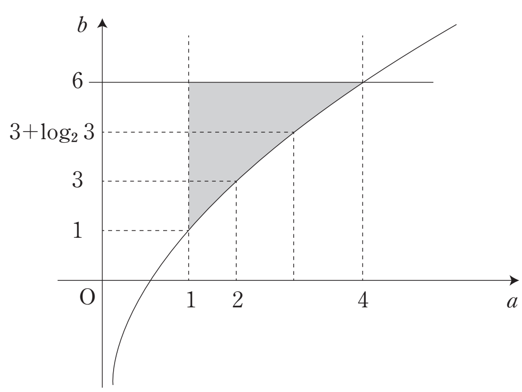
となります。

a，b はサイコロの目ですので 1 ～ 6 までの値であり手間取りませんので値を代入して考えても良いでしょう。

その際は式が複雑な $a+\log_2 a$ に a の値を代入して b の値をしぼり込むことになります。

解答ではこの方法をとっています。

a，b の値の範囲が広くなると上記の方法では大変です。そこで，不等式をグラフに図示してみると下図のようになります。



グラフにすることで全体像がわかりやすくなります。

解　答

(1)　$a\cdot 2^a=64=2^6$

$a=4$ のとき

(左辺) $=4\cdot 2^4=2^2\cdot 2^4=2^6$ となるから

$\boldsymbol{a=4}$ である。

(2)　$a=3$ のとき

不等式は $3\cdot 2^3 \leqq 2^b \leqq 2^6$ となる。2^3 で割ると

$3 \leqq 2^{b-3} \leqq 2^3$

b は整数だから　　$2^1 < 3 < 2^2$ から

$2^1 < 3 < 2^2 \leqq 2^{b-3} \leqq 2^3 \Leftrightarrow 2 \leqq b-3 \leqq 3$

したがって $a=3$ のとき b は5，6の**2個**の値であり，その和は**11**

(3)　$a\cdot 2^a \leqq 2^b \leqq 2^6$ より $b \leqq 6$ であるから不等式を満たす b の値が4個ということは $3 \leqq b \leqq 6$ となることである。

したがって，$2^2 < a\cdot 2^a \leqq 2^3$ となればよい。

$a=2$ のとき $2^2 < 2\cdot 2^2 \leqq 2^3$ となるから求める a は**2**

(4)　$a=1$ のとき不等式は

$1\cdot 2^1 \leqq 2^b \leqq 2^6$

より $1 \leqq b \leqq 6$ となる。

$a=2$ のときは(3)より $3 \leqq b \leqq 6$

$a=3$ のときは(2)より $5 \leqq b \leqq 6$

$a=4$ のときは(1)より $b=6$

となるから不等式を満たす a，b の組み合わせは全部で13通りある。

サイコロの目の出方は全部で $6\times 6=36$ 通りであるから　求める確率は $\mathbf{\dfrac{13}{36}}$ である。

2

解　法

整式の計算は因数分解が基本となります。

高次方程式の場合は因数分解により2次以下にできないと解が求められません。

本問ではまず2倍角，3倍角の公式で θ の3次式をつくることからはじめます。

3倍角の公式はしっかり覚えましょう。ただ，どうしても覚えられない場合は複素数平面でのド・モアブルの定理から導くという方法があります。

$\mathrm{Z}=\cos\theta+i\sin\theta$ として

$$\mathrm{Z}^3=(\cos\theta+i\sin\theta)^3$$
$$=\cos 3\theta+i\sin 3\theta$$

ここで $(\cos\theta+i\sin\theta)^3$ を展開すると

$$\cos^3\theta+3i\cos^2\theta\sin\theta+3i^2\cos\theta\sin^2\theta+i^3\sin^3\theta$$
$$=\cos^3\theta-3i\cos\theta\sin^2\theta+i(3\cos\theta\sin\theta-\sin^3\theta)$$
$$=4\cos^3\theta-3\cos\theta+i(3\sin\theta-4\sin^3\theta)$$

$$\therefore\quad \cos 3\theta+i\sin 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta+i(3\sin\theta-4\sin^3\theta)$$

θ についての恒等式だから

$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

$\sin 3\theta=-4\sin^3\theta+3\sin\theta$　となる。

この方法であればパスカルの三角形を使うことで比較的カンタンに n 倍角の式を導くことができます。

θ の3次方程式となったところで因数分解をします。比較的共通因数が見付けやすい形なので問題ないでしょう。

解　答

(1)　
$$4a^3+2a^2-2a-1=2a^2(2a+1)-(2a+1)$$
$$=(2a^2-1)(2a+1)$$
$$=(\sqrt{2}\,a+1)(\sqrt{2}\,a-1)(2a+1)$$

$$\therefore\quad a=\pm\mathbf{\frac{1}{\sqrt{2}}},\ \mathbf{-\frac{1}{2}}$$

点A，B，Cはそれぞれ中心角が θ，2θ，3θ であるから $\mathrm{A}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{B}(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$，$\mathrm{C}(\cos 3\theta,\ \sin 3\theta)$ である。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の x 座標の値 $=0$ より

$\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta=0$

3倍角の公式より

$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

2倍角の公式より

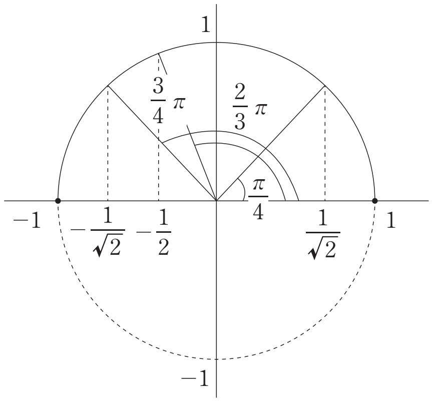
$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$　だから

$$\cos\theta+(2\cos^2\theta-1)+4\cos^3\theta-3\cos\theta$$
$$=4\cos^3\theta+2\cos^2\theta-2\cos\theta-1$$

(1)の結果より $\cos\theta=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{1}{2}$ となることがわかるから $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲では

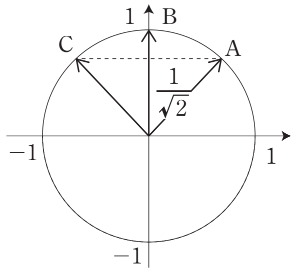
$$\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{3}{4}\pi$$

である。

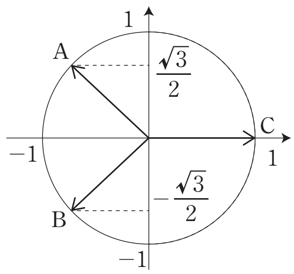


(3)　$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ を図示すると

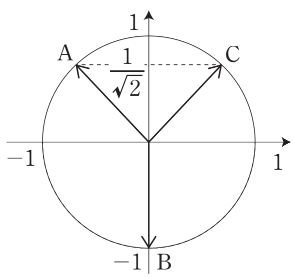
$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき



$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき



$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$ のとき



最大値は $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のときで

$$y_1+y_2+y_3=\frac{1}{\sqrt{2}}+1+\frac{1}{\sqrt{2}}=\mathbf{1+\sqrt{2}}$$

最小値は $\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ のときで

$$y_1+y_2+y_3=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+0=\mathbf{0}$$

3

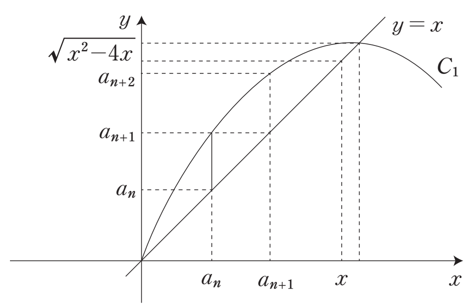
解　法

本問の面積は積分せずにおうぎ形と三角形の面積の組み合せで図形的に求めることができます。

(3)の領域を考える問題では図形を考えることはいうまでもありませんが，(3)のような数列の問題でも図形的に考えることで見通しが良くなることがあります。

本問の(3)では図形から数列を定義しているため，図形を考えることは容易ですが，数列を漸化式だけで定義されているときにも図示してみることを考えるようにすると良いでしょう。

本問では円 C_1 の方程式を y について解いた第1象限内の式 $y=2-\sqrt{x^2-4x}$ と直線 $y=x$ により a_n と a_{n+1} の関係を図示することができます。



直線 $y=x$ が原点と点 $(2,\ 2)$ で円と交わる弦であることから $2-\sqrt{x^2-4x}>x$ は明らかで $a_{n+1}>a_n$ がわかります。

又，a_n は単調増加であれば a_n が 2 に近づいていくため，a_n が 2_n 近づくことで，$a_{n+1}-a_n$ が減少することもグラフから明らかです。

解答では $\dfrac{2-a_{n+1}}{2-a_n}<1$ より極限を求めています。

解　答

(1)　円 C_1，C_2 の連立方程式として辺々引くと，

$$\begin{array}{rl} & x^2-4x+y^2=0 \\ - & \underline{x^2+y^2-4y=0} \\ & -4x+4y=0 \end{array}$$

したがって $x=y$ と C_1 との交点を求めればよい。

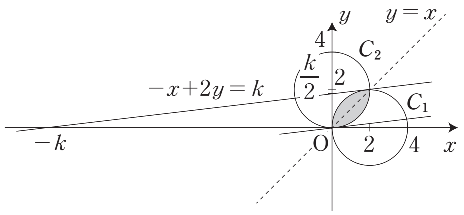
$$\begin{aligned} x^2-4x+y^2&=x^2-4x+x^2 \\ &=2x(x-2) \end{aligned}$$

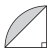
∴　$x=0,\ 2$

求める交点は(2, 2)

円 C_1 の式で，x と y を入れ換えると円 C_2 の式になることから円 C_1，C_2 は $y=x$ について対称であることは容易にわかります。このことが見破れれば円 C_1 と C_2 の交点は $y=x$ 上にあることは自明です。

⑵　領域 D は右図のようになる。



領域 D の面積は  という図形の面積の 2 倍だから　$2\left(2^2\pi\times\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\times2^2\right)=\mathbf{2\pi-4}$

$-x+2y=k$ とおくとこの式は

x 切片 $-k$，y 切片 $\frac{k}{2}$ の直線である。

この直線が領域 D と共有点をもつときの k の最大値を求めればよい。

図示すると $-x+2y=k$ が円 C_1 と接するときが最大，円 C_2 と接するときが最小となる。

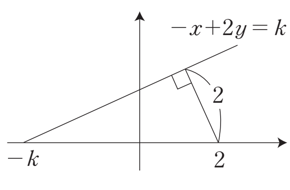
最大となるときは直線と点(2, 0)の距離が 2 となるから点と直線の距離の公式より

$$\frac{|-2+0-k|}{\sqrt{(-1)^2+2^2}}=2$$

$$|(-2-k)|=2\sqrt{5}$$

$$k+2=\pm2\sqrt{5}$$

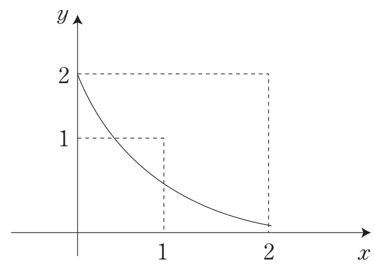
$$k=-2\pm2\sqrt{5}$$



円 C_1 と直線が第 1 象限で接するときは $k>0$ であるから求める最大値は $-2+\sqrt{5}$

⑷　右図より $0<a_n<2$ の範囲で $a_n<a_{n+1}$ であることは明かである。

又 $2-a_{n+1}$ の値 r の範囲を考えると $r=2-\sqrt{x^2-4x}$ であり，このグラフは図のようになり $1<x<2$ の範囲では r は単調減少関数で $0<r<1$ である。



a_n は単調増加であるから $1<a_n$ となることは明らかであり，この後の a_n の変化を考えると

$$2-a_n=r_n \Leftrightarrow \frac{2-a_{n+1}}{2-a_n}=\frac{r_{n+1}}{r_n}<1$$

$$2-a_{n+1}=r_{n+1}$$

$$2-a_{n+1}<\frac{r_{n+1}}{r_n}(2-a_n)$$

より $\lim_{n\to\infty}a_n=2$ とわかる。

来月号では、北里大学医学部の数学を攻略しますので、ご期待ください！

全12校の掲載予定は以下のとおりとなっております。

第49回／４月号　東邦大学医学部
第50回／５月号　東京女子医科大学
第51回／６月号　金沢医科大学
第52回／７月号　岩手医科大学医学部
第53回／８月号　北里大学医学部
第54回／９・10合併号　日本大学医学部
第55回／10月臨時増刊号　聖マリアンナ医科大学
第56回／11月号　愛知医科大学
第57回／12月号　東京医科大学
第58回／１・２月合併号　杏林大学医学部
第59回／３月臨時増刊号　東京慈恵会医科大学
第60回／３月号　昭和大学医学部