東大螢雪会 医学部数学 攻略演習

マンツーマン指導で医歯薬学部に多くの合格者を輩出している「東大螢雪会」では，主要な私立大学医学部の予想問題を作成しています。このコーナーでは，「東大螢雪会」の作成した予想問題を用いて，主要な私立大学医学部の数学を攻略するための演習を行います。毎号１校分の演習を行い，全12校の連載となる予定です。

今月号では，金沢医科大学の数学を攻略します！

第51回 金沢医科大学 編

東大螢雪会講師　小池　淳

金沢医科大学の数学は，制限時間60分で大問５題の出題となります。出題形式は必ずしも一定していませんが，制限時間に対してやや設問の数が多く，迅速な対応と正確な計算が要求されます。７割程度の得点率が必要でしょう。今回の予想問題でも７割程度の得点率を目指して下さい。

$\boxed{1}$　k は１でない正の定数とし，x の方程式

$$\left(\log_2 \frac{x}{4}\right)^2 - 4k \log_4 x + 2k^2 = 0 \quad \cdots \quad ①$$

を考える。

①の x の方程式は $\log_2 x = X$ とおくと

$$X^2 - \boxed{\text{ア}}\,(k + \boxed{\text{イ}})\,X + \boxed{\text{ウ}}\,k^2 + \boxed{\text{エ}} = 0 \quad \cdots \quad ②$$

となる。

①の x の方程式が異なる２つの解をもつには，②式の X が異なる２つの実数解をもてばよいから

$$\boxed{\text{オ}} < k < \boxed{\text{カ}}, \quad \boxed{\text{キ}} < k < \boxed{\text{ク}}$$

①の x の方程式の異なる２つの解を α，β とおく。

$\alpha\beta = 32$ とすると，

解と係数の関係より

$$\log_2 \alpha\beta = \boxed{\text{ケ}}\,(k + \boxed{\text{コ}})$$

$\alpha\beta = 32$ より k の値は

$$k = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$$ となる。

$\boxed{2}$　O (0, 0, 0) を原点とする座標空間内に，５つの定点 A (2, 1, 1), B (1, 2, 1), C (2, 2, 0), D (2, 1, 0), E (1, 2, 0) がある。点Cを通り２つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と直交する直線 ℓ 上に動点Pをとる。

(1) ℓ の方向ベクトル $\vec{a}$ で，x 成分が 1 であるものは $\vec{a}=(1,$ $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$ $)$ であるから，

t を実数として $\mathrm{P}(t+\boxed{\text{ウ}},\ t+\boxed{\text{エ}},\ -\boxed{\text{オ}}\,t)$ と表される。

(2) 直線 ℓ と平面OABの交点をFとすると，Fの x 座標はである。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PE}}$ のなす角を $\theta\,(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると，(1)を用いて

$\cos\theta=\dfrac{\boxed{\text{コサ}}\,t^2+\boxed{\text{シ}}\,t}{\boxed{\text{スセ}}-t^2+\boxed{\text{ソ}}\,t+\boxed{\text{タ}}}$ と表されるから，θ が最大となるとき，

$t=-\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ である。

$\boxed{3}$ x の関数 $f(x)=\log(x^2+1)$ が与えられている。

(1) $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を原点とする座標平面上で，曲線 $C：y=f(x)$ は2つの変曲点

$\mathrm{A}(\boxed{\text{ア}},\ \log\boxed{\text{イ}})$，$\mathrm{B}(-\boxed{\text{ウ}},\ \log\boxed{\text{エ}})$ をもつ。そして，この点において曲線に

引いた本の接線および

直線 AB で囲まれる三角形の面積は $\boxed{\text{オ}}$ である。

さらに，曲線 C の異なる接線で，点 $(0,\ k)$ を通るものが 4 本引けるような定数 k の値の範囲は

$\log\boxed{\text{カ}}-\boxed{\text{キ}}<k<\boxed{\text{ク}}$ である。

$\boxed{4}$ $x+y=1,\ x>0,\ y>0$ のとき，$z=x^xy^y$ の最小値を求めよ。

x の変域は $0<x<\boxed{\text{ア}}$ である。

z を x で表して変形すると，

$\log z=\boxed{\text{イ}}\,x\log+(\boxed{\text{ウ}}-\boxed{\text{エ}}\,x)\log(\boxed{\text{オ}}-\boxed{\text{カ}}\,x)$

となる。

微分すると，

$\dfrac{1}{z}\dfrac{dz}{dx}=\log\boxed{\text{キ}}\,x+\log(\boxed{\text{ク}}-\boxed{\text{ケ}}\,x)$

となる。

したがって，最小値は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$

である。

$\boxed{5}$ $a_1=1,\ a_2=2,\ a_{n+2}=\sqrt{a_{n+1}\cdot a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3\ \cdots)$ を満たす数列 $\{a_n\}$ がある。

$b_n=\log_2 a_n$ とおけば，$b_{n+1}-b_n=\left(-\dfrac{1}{\boxed{ア}}\right)^{n-1}$ が成り立つ。

したがって，数列 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n=\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}\left\{\boxed{エ}-\left(-\dfrac{1}{\boxed{ア}}\right)^{n-1}\right\}$ であり，

数列 $\{a_n\}$ の極限値は $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\boxed{オ}^{\frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}}$ である。

$\boxed{1}$

解　説

$\log_2 x$ を X としておくことで，X の 2 次方程式となります。

あとは X の範囲に気をつけておきましょう。対数の基本的な取り扱いにも注意しましょう。

解

①より

$(\log_2 x-\log_2 4)^2-4k\dfrac{\log_2 x}{\log_2 4}+2k^2=0$

$(\log_2 x-\log_2 4)^2-2k\log_2 x+2k^2=0$

$\therefore\ \ (\log_2 x)^2-2(k+2)\log_2 x+2k^2+4=0$

$\log_2 x=X$ とおくと

$X^2-2(k+2)X+2k^2+4=0\quad\cdots\quad②$

①が異なる 2 つの解をもつには，②が異なる 2 つの実数解をもてばよく，そのための条件は，

$\{2(k+2)\}^2-4(2k^2+4)>0$

$k^2-4<0$

$\therefore\ \ k(k-4)<0$

これと $k>0,\ k\neq1$ より

$0<k<1,\ 1<k<4\quad\cdots\quad③$

①の 2 解が $\alpha,\ \beta$ であるから，②の 2 解は $\log_2\alpha$ と $\log_2\beta$ である。

解と係数の関係より

$\log_2\alpha+\log_2\beta=2(k+2)$

$\therefore\ \ \log_2\alpha\beta=2(k+2)$

$\alpha\beta=32$ より

$\log_2 32=2(k+2)$

$\therefore\ \ 5=2(k+2)$

$\therefore\ \ k=\dfrac{1}{2}$ （これは③をみたす）。

$\boxed{2}$

解　説

空間ベクトルでも基本的な考え方は平面ベクトルと同じです。基底ベクトルを設定して考えていきましょう。

分数関数では

分子の次数＜分母の次数

とすることを忘れずに。

解

(1) $\vec{a}=(1,\ a,\ b)$ とすると，

$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$ より　$2+a+b=0$

$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ より　$1+2a+b=0$

よって，$a=1,\ b=-3$ となり，

$\vec{a}=(1,\ 1,\ -3)$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+k\vec{a}$ （k：実数）と表されるから，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(2+k,\ 2+k,\ -3k)$

よって，$k=t$ となり，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(t+2,\ t+2,\ -3t)$

(2)　(1)から，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=(t+2,\ t+2,\ -3t)$ と表される。

また，F は平面OAB上にもあるから，m，n を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=m\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+n\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$=(2m+n,\ m+2n,\ m+n)$$

と表せる。

よって，

$$\begin{cases} t+2=2m+n \\ t+2=m+2n \\ -3t=m+n \end{cases}$$

$t=-\dfrac{4}{11}$，$m=n=\dfrac{6}{11}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\left(\dfrac{18}{11},\ \dfrac{18}{11},\ \dfrac{12}{11}\right)$ より，

F の x 座標は $\dfrac{18}{11}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{PD}}=(-t,\ -1-t,\ 3t)$，

$\overrightarrow{\mathrm{PE}}=(-1-t,\ -t,\ 3t)$ より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{PD}}||\overrightarrow{\mathrm{PE}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PD}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{PE}}|^2=11t^2+2t+1$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PE}}=11t^2+2t$$

したがって，

$$\cos\theta=\frac{11t^2+2t}{11t^2+2t+1}$$

となる。

ここで

$$\frac{11t^2+2t}{11t^2+2t+1}=1-\frac{1}{11t^2+2t+1}$$
$$=1-\frac{1}{11\left(t+\dfrac{1}{11}\right)^2+\dfrac{10}{11}}$$

よって，$\cos\theta$ は $t=-\dfrac{1}{11}$ のとき最小となる。

よって θ は $t=-\dfrac{1}{11}$ のとき最大となる。

$\boxed{3}$

解　説

2階微分して関数の凹凸を調べましょう。接線の本数は接点の戸数との対応関係から考えましょう。

解

$f(x)=\log(x^2+1)$

(1)　$f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$，$f''(x)=\dfrac{2(1+x)(1-x)}{(x^2+1)^2}$

より，下の凹凸の表が得られる。

x		-1		1	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	凸	$\log 2$	凹	$\log 2$	凸

凸は上に凸であることを示す。

凹は下に凸あることを示す。

曲線Cは2つの変曲点

A$(1,\ \log 2)$，B$(-1,\ \log 2)$　をもつ。

点Aにおける曲線Cの接線の方程式は

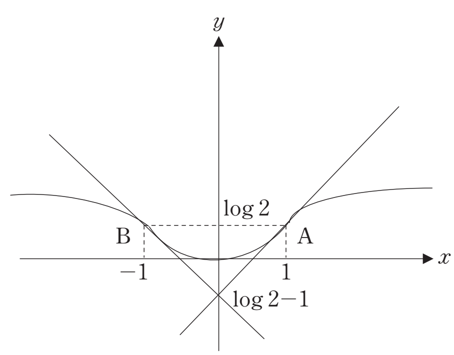
$y=x-1+\log 2$

Bにおける曲線Cの接線の方程式は

$y=-x-1+\log 2$

これらと直線ABで囲まれる図形は二等辺三角形となり，その面積は

$1\times\{\log 2-(\log 2-1)\}=1$



また，曲線C上の点$(t,\ \log(t^2+1))$における接線の方程式は

$$y=\frac{2t}{t^2+1}(x-t)+\log(t^2+1)$$

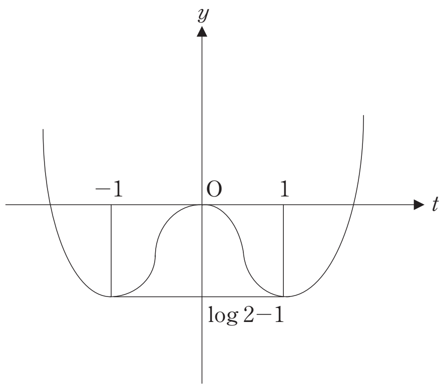
これが点$(0,\ k)$を通るから

$$k=\frac{2t^2}{t^2+1}+\log(t^2+1)$$

$g(t)=-\dfrac{2t^2}{t^2+1}+\log(t^2+1)$とおくと

$$g'(t)=\frac{2t(t+1)(t-1)}{(t^2+1)^2}$$

よって，$y=g(t)$のグラフは図のようになる。



これと直線$y=k$が4つの異なる共有点をもつ条件より

$\log 2-1<k<0$

$\boxed{4}$

解　説

与えられたzはそのまま微分するのは大変なので自然対数をとって対数微分をすることになります。誘導がついていなくても発想できるようにしておきましょう。その後の処理は一本道です。

解

xの変域は$0<x<1$である。

両辺の自然対数をとると$\log z=x\log x+y\log y$

zをxだけで表すと

$\log z=x\log x+(1-x)\log(1-x)$

となる。

微分すると，

$$\frac{1}{z}\frac{dz}{dx}=\log x+1-\log(1-x)-1$$
$$=\log\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

$$\frac{dz}{dx}=z\log\left(\frac{x}{1-x}\right)$$
$$=x^x(1-x)^{1-x}\log\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$\frac{dz}{dx}$		$-$	0	$+$	
z		↘	$\frac{1}{2}$	↗	

増減表より

zは$x=\dfrac{1}{2}$のとき

$$\log z=\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}$$
$$=\log\frac{1}{2}$$

$$z=\frac{1}{2}$$

となる。

したがって，最小値は$\dfrac{1}{2}$

$\boxed{5}$

解　説

左辺がa_{n+2}　1次式，右辺がa_n，a_{n+1}の$\dfrac{1}{2}$次式となっています。次数が異なるとき対数をとるのは有効な手段です。

解

両辺の対数をとると，

$\log_2 a_{n+2}=\dfrac{1}{2}(\log_2 a_{n+1}+\log_2 a_n)$より，

$$b_{n+2}=\frac{1}{2}(b_{n+1}+b_n)$$

$b_1=\log_2 a_1=0$，$b_2=\log_2 a_2=1$となる。

特性方程式$x^2=\dfrac{1}{2}(x+1)$　より

$$x=1,\ -\frac{1}{2}$$

よって，$b_{n+2}-b_{n+1}=-\frac{1}{2}(b_{n+1}-b_n)$

$b_2-b_1=1$

数列$\{b_{n+1}-b_n\}$は初項，公比$-\frac{1}{2}$の等比数列であることがわかる。

したがって，

$$b_{n+1}-b_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \cdots \quad ①$$

また

$$b_{n+2}+\frac{1}{2}b_{n+1}=b_{n+1}+\frac{1}{2}b_n$$

$$b_2+\frac{1}{2}b_1=1$$

数列$\left\{b_{n+1}+\frac{1}{2}b_n\right\}$は定数列であることがわかる。

$$b_{n+1}+\frac{1}{2}b_n=1 \quad \cdots \quad ②$$

②−①　より

$$\frac{3}{2}b_n=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$b_n=\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

である。

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

$$=\frac{2}{3}$$

であるから

$a_n=2^{b_n}$　より

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}2^{b_n}$$

$$=2^{\frac{2}{3}}$$

である。

来月号では，岩手医科大学医学部の数学を攻略しますので，ご期待ください！

全12校の掲載予定は以下のとおりとなっております。

第49回／４月号　東邦大学医学部
第50回／５月号　東京女子医科大学
第51回／６月号　金沢医科大学
第52回／７月号　岩手医科大学医学部
第53回／８月号　北里大学医学部
第54回／９・10合併号　日本大学医学部
第55回／10月臨時増刊号　聖マリアンナ医科大学
第56回／11月号　愛知医科大学
第57回／12月号　東京医科大学
第58回／１・２月合併号　杏林大学医学部
第59回／３月臨時増刊号　東京慈恵会医科大学
第60回／３月号　昭和大学医学部