東大螢雪会 医学部数学 攻略演習

マンツーマン指導で医歯薬学部に多くの合格者を輩出している「東大螢雪会」では，主要な私立大学医学部の予想問題を作成しています。このコーナーでは，「東大螢雪会」の作成した予想問題を用いて，主要な私立大学医学部の数学を攻略するための演習を行います。毎号1校分の演習を行い，全12校の連載となる予定です。

今月号では，東京女子医科大学の数学を攻略します！

第50回 東京女子医科大学 編

東大螢雪会講師　小池　淳

東京女子医科大学の数学は，制限時間60分で大問4題の構成で，全問が記述式です。微積分が重視されていますが，幅広い分野から出題されるのでヤマをかけるのは禁物です。典型的かつ標準的な出題が多いため，受験生の基礎力が問われます。しかしながら，試験時間の割に問題数がやや多めなので，日々の訓練によって解くスピードを身につけておくことも必要となります。また，工夫された問題も多いため，実力差が得点に大きく反映されます。7割5分程度の得点率を目指して下さい。

1

a を1より大きい定数とする。$1 \leqq x \leqq a$ における関数 $y=(\log_2 x)^2-\log_2 x^2+2$ の最小値を求めよ。

2

表の出る確率が p であるコインを投げて次の試行を繰り返して行う。最初，コインは1枚であるとする。

コインを投げて表が出たコインの数だけコインを追加する。

例えば，3枚のコインを投げ，表2枚，裏が1枚出たときにはコインを2枚追加する。

(1) 試行を2回行った後にコインが3枚になる確率を求めよ。

(2) 試行を3回行った後にコインが6枚以下である確率を求めよ。

3

n を自然数として，関数 $f(x)=\log x+\dfrac{a}{x^n}\ (x>0)$ とする。

すべての x に対して $f(x)>0$ となるための a の条件を求めよ。

4

a を正の実数として，関数 $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{e^x-a}$ を考える。

(1) $f(x)$ が $x=\log 6$ で極値をとるとき a の値，および極値の値を求めよ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\log 2} f(x)\,dx$ の値を求めよ。ただし，a の値は(1)で求めた値とする。

解　説

1

解

　a を1より大きい定数とする。$1 \leqq x \leqq a$ における関数 $y=(\log_2 x)^2-\log_2 x^2+2$ の最小値を求めよ。

$t=\log_2 x$ とおくと，$\log_2 x$ は単調増加関数であるから，

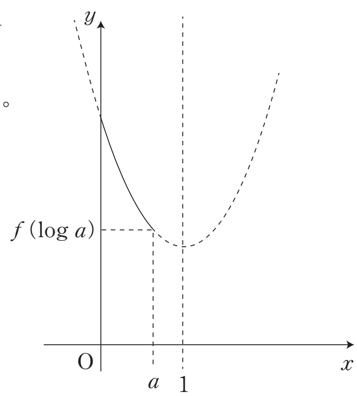
$1 \leqq x \leqq a$ より，$\log_2 1=0 \leqq t \leqq \log_2 a$

$y=t^2-2t+2$
　$=(t-1)^2+1$

軸が t の値の範囲内かどうかで場合分けする。

［Ⅰ］ $\log_2 a<1$
すなわち，
$1<a<2$ のとき。

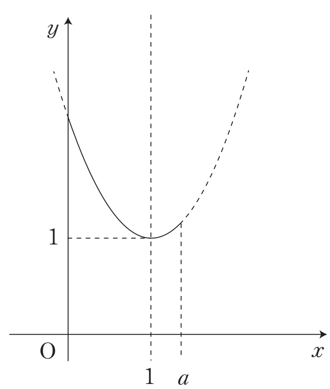
このとき軸は，
t の値の範囲外
である。



関数は $t=\log_2 a$　すなわち $x=a$ で最小値をとる。
したがって，最小値は
$(\log_2 a)2-\log_2 a^2+2$ である。

［Ⅱ］ $1 \leqq \log_2 a$
すなわち，
$2 \leqq a$ のとき

このとき軸は
t の値の範囲内
である。



関数の最小値は2次関数の頂点の値となる。
したがって，最小値は1である。

2

解

　表の出る確率が p であるコインを投げて次の試行を繰り返して行う。最初，コインは1枚であるとする。
　コインを投げて表が出たコインの数だけコインを追加する。
　例えば，3枚のコインを投げ，表が2枚，裏が1枚出たときにはコインを2枚追加する。
⑴　試行を2回行った後にコインが3枚になる確率を求めよ。
⑵　試行を3回行った後にコインが6枚以下である確率を求めよ。

コインの裏が出る確率は $1-p$ である。
2回試行をするときのコインの表裏の出方とそのときのコインの枚数は
　表，（表・表）　…　4
　表，（表・裏）　…　3
　表，（裏・裏）　…　2
　裏，表　　　　　…　2
　裏，裏　　　　　…　1
となる。
試行を2回行ってコインが3枚となるのは
1回目に表が出て，2回目に1枚表，1枚裏が出るときであるから

$p \times {}_2C_1 p(1-p)=2p^2(1-p)$

⑵　3回試行をした後のコインの枚数は1，2，3，4，5，6，7，8となる。
8枚となるのは，1回目表，2回目2枚とも表，3回目4枚とも表　と出る場合である。
その確率は

$p \times p^2 \times p^4=p^7$

7枚となるのは，１回目表，２回目２枚とも表，３回目３枚表１枚裏　と出る場合である。
その確率は

$p\times p^2\times {}_4C_1p^3(1-p)=4p^6(1-p)$

したがって，求める確率は

$1-p^7-4p^6(1-p)=3p^7-4p^6+1$

3

解

n を自然数として，関数 $f(x)=\log x+\dfrac{a}{x^n}$ $(x>0)$ とする。
すべての x に対して $f(x)>0$ となるための a の条件を求めよ。

$f(x)=\log x+\dfrac{a}{x^n}>0$ より

$\dfrac{a}{x^n}>-\log x$

$x>0$ であるから

$a>-x^n\log x$　…　①

すべての正の数 x に対して，①が成り立つような a の値の範囲を求める。

$g(x)=-x^n\log x$　とおくと

$g'(x)=-nx^{n-1}\log x-x^{n-1}$

$\quad=-x^{n-1}(n\log x+1)$

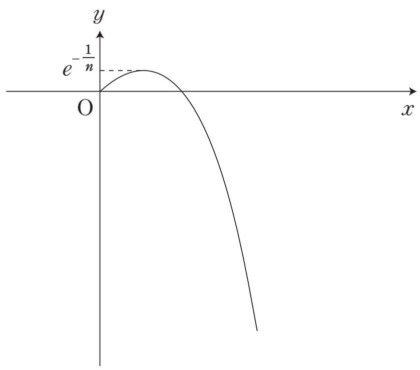
$g'(x)=0$ とすると，$x>0$ であるから，

$n\log x+1=0$

$\therefore\quad x=e^{-\frac{1}{n}}$

増減表は

x	0	$\cdots$	$e^{-\frac{1}{n}}$	$\cdots$
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	1	↗	極大	↘



よって，$g(x)$ の最大値は

$g\left(e^{-\frac{1}{n}}\right)=-e^{-\frac{1}{n}\cdot n}\log e^{-\frac{1}{n}}$

$\quad=-e^{-1}\cdot\left(-\dfrac{1}{n}\right)\log e$

$\quad=-\dfrac{1}{ne}$

したがって，求める条件は

$a>\dfrac{1}{ne}$

4

解

a を正の実数として，関数 $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{e^x-a}$ を考える。

(1)　$f(x)$ が $x=\log 6$ で極値をとるとき a の値，および極値の値を求めよ。

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\log 2}f(x)\,dx$ の値を求めよ。ただし，a の値は(1)で求めた値とする。

(1)　$f(x)$ を微分して

$f'(x)=\dfrac{2e^{2x}(e^x-a)-e^{2x}\cdot e^x}{(e^x-a)^2}$

$\quad=\dfrac{e^{2x}(e^x-2a)}{(e^x-a)^2}$

$f'(x)=0$ とすると，$e^{2x}>0$ であるから，

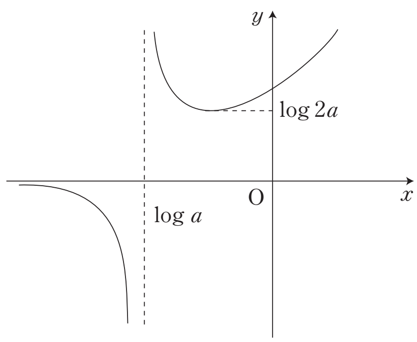
$e^x-2a=0$

$a>0$ より　$x=\log 2a$

$f(x)$の増減表は

x	$\cdots$	$\log a$	$\cdots$	$\log 2a$	$\cdots$
y'	$-$		$-$	0	$+$
y	↘		↘	極大	↗

となる。



$f(x)$は$x=\log 6$で極値をとるので,

$\log 6=\log 2a$

$\therefore \quad a=3$

このとき，極小値は

$$f(\log 6)=\frac{e^{2\log 6}}{e^{\log 6}-3}$$

$$=\frac{6^2}{6-3}$$

$$=12$$

である。

(2)　$a=3$のとき

$$\int_0^{\log 2} f(x)\,dx=\int_0^{\log 2}\frac{e^{2x}}{e^x-3}\,dx$$

ここで，$e^x-3=t$とおくと

$dt=e^x dx=(t+3)\,dx$

$$dx=\frac{dt}{t+3}$$

x	0	$\to$	$\log 2$
t	-2	$\to$	-1

よって,

$$\int_0^{\log 2}\frac{e^{2x}}{e^x-3}\,dx=\int_{-2}^{-1}\frac{(t+3)^2}{t}\cdot\frac{dt}{t+3}$$

$$=\int_{-2}^{-1}\frac{t+3}{t}\,dt$$

$$=\int_{-2}^{-1}\left(1+\frac{3}{t}\right)dt$$

$$=\Big[\,t+3\log|t|\,\Big]_{-2}^{-1}$$

$$=(-1+3\log 1)-(-2+3\log 2)$$

$$=1-3\log 2$$

来月号では，金沢医科大学の数学を攻略しますので，ご期待ください！

全12校の掲載予定は以下のとおりとなっております。

第49回／４月号　東邦大学医学部
第50回／５月号　東京女子医科大学
第51回／６月号　金沢医科大学
第52回／７月号　岩手医科大学医学部
第53回／８月号　北里大学医学部
第54回／９・10合併号　日本大学医学部
第55回／10月臨時増刊号　聖マリアンナ医科大学
第56回／11月号　愛知医科大学
第57回／12月号　東京医科大学
第58回／１・２月合併号　杏林大学医学部
第59回／３月臨時増刊号　東京慈恵会医科大学
第60回／３月号　昭和大学医学部

「東大螢雪会」では，本誌をご覧の方々の学力アップのために，主要な私立大学医学部の予想問題を無料でプレゼントしています。ご希望の方は，「東大螢雪会」のホームページ（http://www.keisetsukai.com）（PC・携帯）からお問い合わせください。