東大螢雪会 医学部数学 攻略演習

マンツーマン指導で医歯薬学部に多くの合格者を輩出している「東大螢雪会」では，主要な私立大学医学部の予想問題を作成しています。このコーナーでは，「東大螢雪会」の作成した予想問題を用いて，主要な私立大学医学部の数学を攻略するための演習を行います。毎号１校分の演習を行い，全12校の連載となる予定です。

今月号では，杏林大学医学部の数学を攻略します！

第38回 杏林大学医学部 編

東大螢雪会講師　小池　淳

杏林大学医学部の数学は，制限時間60分で大問４題の形式となっていますが，小問集合を含む場合もあります。受験勉強の努力が得点に反映されやすい素直な出題が多いものの，大問のうち１題はややハイレベルであることもあります。また，Ⅳで出題される微積分は比較的簡単なので時間が切迫しないうちに完答しておくべきでしょう。７割以上の得点率が望まれます。

Ⅰ　２つの正四面体 $ABCD$ と $EBCD$ を面 BCD で貼り合わせた六面体 $ABCDE$ がある。なお，頂点 A と頂点 E は $\triangle BCD$ を挟んで対称な位置にある。点 P が最初に頂点 A 上にあり，以後１回の操作ごとに辺を通って隣の頂点へ移動することとするとき，以下の問いに答えよ。ただし，隣接する頂点が m 個あるとき，各頂点へ移動する確率は $\dfrac{1}{m}$ とする。

(a)　n 回の操作後に点 P が $\triangle BCD$ 上にある確率を p_n とする。

このとき，$p_2=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$，$p_3=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(b)　p_{n+1} と p_n の関係式は

$$p_{n+1}=\frac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キ}}}p_n+\boxed{\text{ク}}$$

となり，p_n の一般項は

$$p_n=\frac{1}{\boxed{\text{ケ}}}\left\{\boxed{\text{コ}}+\left(\frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}\right)^{n-1}\right\}$$

である。

(c)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ であり，$p_n<\dfrac{19}{30}$ となるような正の整数 n は $\boxed{\text{タ}}$ 個ある。

Ⅱ 連立方程式(*)$\begin{cases} 4x-y=kx \\ x+2y=ky \end{cases}$（$k$は定数）について，以下の問いに答えよ。

(a) (*)が$(x,\ y)=(0,\ 0)$以外の解を持つとき，$k=$ $\boxed{\text{ア}}$ である。

(b) 行列$A=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，$\vec{u}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$とする。$(A-kE)\vec{u}=O$を満たす$\vec{u}$の1つを$\vec{u_1}=\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$とし，さらに$(A-kE)\vec{u}=\vec{u_1}$を満たす$\vec{u}$の1つを$\vec{u_2}=\begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$としたとき，$a=$ $\boxed{\text{イ}}$，$b=$ $\boxed{\text{ウ}}$ である。

$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$という行列を定めると，

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \boxed{\text{エ}} & \boxed{\text{オ}} \\ \boxed{\text{カ}} & \boxed{\text{キ}} \end{pmatrix}$$

となる。

(c) $(P^{-1}AP)^n$を計算し，この結果を利用してA^{50}を求めると，

$$A^{50}=\boxed{\text{ク}}^{49}\begin{pmatrix} \boxed{\text{ケコ}} & \boxed{\text{サシス}} \\ \boxed{\text{セソ}} & \boxed{\text{タチツ}} \end{pmatrix}$$

となる。

Ⅲ 座標平面上に2点$O(0,\ 0)$，$A(3,\ 0)$および点Oを中心とする半径2の円C_1と，点Aを中心とする半径1の円C_2がある。C_1上に$\overrightarrow{OP}$とx軸正方向のなす角がθとなるように点Pを，C_2上に$\overrightarrow{AQ}$とx軸正方向のなす角が$\theta+90^\circ$となるように点Qを定めるとき，以下の問に答えよ。

(a) $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$は最大値 $\boxed{\text{ア}}$ をとる。

(b) $|\overrightarrow{PQ}|^2$の値はθを用いて

$$|\overrightarrow{PQ}|^2=\boxed{\text{イウ}}-\boxed{\text{エ}}\sin\theta-\boxed{\text{オカ}}\cos\theta$$

と表すことができる。

(c) $|\overrightarrow{PQ}|^2$は，$\cos\alpha=\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}$を満たすような$\alpha$に対して$\theta=\alpha$のときに最大値をとり，その値は

$\boxed{\text{コサ}}+\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}$ である。

Ⅳ xy平面において，曲線$C:(x^2+y^2)^2=4a^2xy$（aは正の定数）が存在している。

(a) 原点を極，軸の正の部分を始線とする極座標を考えるとき，曲線Cは

$$r^2=\boxed{\text{ア}}\,a^2\sin\boxed{\text{イ}}\,\theta\left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{\boxed{\text{ウ}}},\ \pi\leqq\theta\leqq\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\pi\right)$$

と表される。

(b) $r=\sqrt{\boxed{\text{ア}}\,a^2\sin\boxed{\text{イ}}\,\theta}$ であるから，rは$\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{カ}}}$，$\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\pi$のときに最大値をとる。

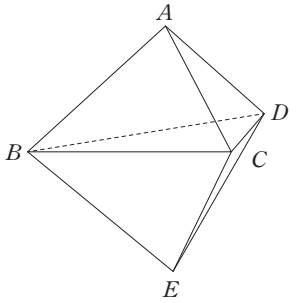
rが最大となる2つの点のうちの1つをM_1とし，M_1が直交座標系において$(2,\ 2)$と表されるとき，$a=$ $\boxed{\text{ケ}}$ であり，rが最大となるもう1つの点M_2の座標は$(\boxed{\text{コサ}},\ \boxed{\text{シス}})$である。

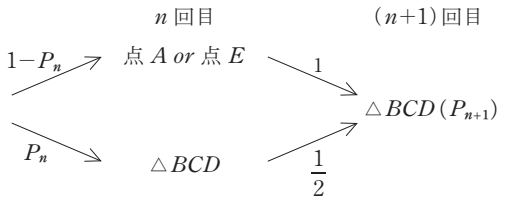
(c)　曲線 C のうち微小部分 $\theta \sim \theta+d\theta$ について，動径が通過する部分を扇形に近似して微小面積 dS を求め，これを θ について積分すると，曲線 C に囲まれた部分の面積を求めることができる。$a=$ ケ のとき，曲線 C に囲まれた部分の面積は セ である。

Ⅰ

方　針

確率漸化式の問題です。n 回の移動後の状態を
状態Ⅰ… $\triangle BCD$ 上にある（確率 P_n）
状態Ⅱ… 点 A または点 E にある（確率 $1-P_n$）
として，





上図の関係を確率の和と積の法則を用いて漸化式にします。

$$\begin{pmatrix}1-P_n\\P_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=P_{n+1}$$

となり，左辺は内積計算です。最も基本的な2項間線形漸化式 $P_{n+1}=rP_n+s$ が得られます。

(c) の n の個数についての問題は，n の範囲を絞り込んでからのしらみつぶしです。$\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ は考えにくいようですが，絶対値が単調減少することがポイントです。

ココがポイント

$P_{n+1}=rP_n+s\,(r\neq 1)$
$\Longleftrightarrow P_{n+1}-\alpha=r(P_n-\alpha)$

（ただし，$\alpha=r\alpha+s \Longleftrightarrow \alpha=\dfrac{s}{1-r}$）

$\{P_n-\alpha\}$ は公比 r の等比数列

解

P が n 回の移動後に $\triangle BCD$ 上にある確率を P_n とすると，点 A または点 E にある確率は $1-P_n$ である。

はじめに P は点 A にあるので，1回の移動後は必ず $\triangle BCD$ 上にある。　$\therefore\ P_1=1$

方針 の図より

$$P_{n+1}=1-P_n+\frac{1}{2}P_n$$
$$=-\frac{1}{2}P_n+1\ \cdots①$$

$n=1$ として $P_2=\dfrac{1}{2}$

$n=2$ として $P_3=-\dfrac{1}{2}P_2+1=\dfrac{3}{4}$

$$① \Longleftrightarrow P_{n+1}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}\left(P_n-\frac{2}{3}\right)$$

$$\therefore\ P_n-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}\left(P_{n-1}-\frac{2}{3}\right)$$
$$=\cdots$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(P_1-\frac{2}{3}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ P_n=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\left\{2+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

$$\lim_{n\to\infty}P_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

$=\dfrac{2}{3}$

$P_n<\dfrac{19}{30}$ のとき

$\dfrac{1}{3}\left\{2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}<\dfrac{19}{30}$

$\iff 2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}<\dfrac{19}{10}$

$\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}<-\dfrac{1}{10}\cdots②$

$n\geqq 5$ のとき $\left|\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right|\leqq\dfrac{1}{16}$ となり，②は不成立。

$\therefore\quad n\leqq 4$

$n=1$ のとき②は不成立

$n=2$ のとき②は成立

$n=3$ のとき②は不成立

$n=4$ のとき②は成立

$\therefore\quad n=2,\ 4$

求める n の個数は 2 個。

Ⅱ

方　針

2 次正方行列 A の固有値・固有ベクトルを用いて A の三角行列（正確には，jordan 標準形）を作って A^n を計算する問題です。固有値が 2 つ存在する場合は対角行列を作ることができる（対角化できる）のですが，本問の A は固有値が 1 つだけ（重解）なので対角化はできません。代わりに三角行列 $\left[\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \gamma\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\alpha & 0\\ \beta & \gamma\end{pmatrix}\text{の形}\right]$ の中でも jordan 標準形と呼ばれる形 $\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$ を作って A^n を計算するというのがテーマです。本問を解くこと自体は比較的簡単ですが，良い機会ですから，行列の固有値，対角化，三角化について説明します。

本論に入る前に行列と連立 1 次方程式についての基本事項をおさらいしましょう。

ココがポイント 1

$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ について

$\varDelta=ad-bc$ を A の行列式といって $\det A$ と表す。

$\det A=ad-bc$

行列式，$\det A$ という用語，記号はともに教科書には出てこない（高校数学の七不思議の 1 つです）のですが，役に立つ知識なので覚えておくべきです。

ココがポイント 2

$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ について，A^{-1} が存在する。

$\iff \det A\neq 0$

$\iff \vec{u}=\begin{pmatrix}a\\ c\end{pmatrix},\ \vec{v}=\begin{pmatrix}b\\ d\end{pmatrix}$ とすると，$\vec{u}$，$\vec{v}$ は 1 次独立

$\iff \vec{u}=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix},\ \vec{v}=\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}$ とすると，$\vec{u}$，$\vec{v}$ は 1 次独立

これらの同値関係は極めて重要です。「2 つの平面ベクトルが 1 次独立である」とはもちろん $\vec{0}$ ではなく，平行でないということです。

ココがポイント 3

x，y の連立方程式

$\begin{cases}px+qy=0\cdots①\\ rx+sy=0\cdots②\end{cases}$ が $(x,\ y)=(0,\ 0)$ 以外の解をもつ。

$\iff B=\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}$ として B^{-1} が存在しない。

$\iff \det B=ps-qr=0$

$\iff \vec{u}=\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix},\ \vec{v}=\begin{pmatrix}r\\ s\end{pmatrix}$ とすると，$\vec{u}$ と $\vec{v}$ は 1 次独立でない。

$\iff \vec{u}$，$\vec{v}$ のいずれかが $\vec{0}$ または $\vec{u}$ と $\vec{v}$ が平行である。

これらの同値関係も重要です。{①，②} の $(x,\ y)=(0,\ 0)$ 以外の解とは

(i) ①，②が直線を表す場合

原点を通る 2 直線の原点以外の共有点だから，$(x,\ y)=(0,\ 0)$ 以外の解が存在するのは①と②が一致するとき，つまり $ps-qr=0$ のときで，解 $(x,\ y)$ は 1 つの直線上の点すべてとなる。

(ii) ①，②のいずれかが直線を表さない場合

$(p,\ q)=\vec{0}$ または $(r,\ s)=\vec{0}$ だが，

$ps-qr=0$ が成り立ち，解 $(x,\ y)$ は，

(イ) $(p,\ q)\neq\vec{0}$ または $(r,\ s)\neq\vec{0}$ のときは，1つの直線上のすべての点

(ロ) $(p,\ q)=(r,\ s)=\vec{0}$ のときは平面上のすべての点，となる。

次に対角行列 $\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$ と三角行列の一種 $\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$ について n 乗を確認しましょう。

ココがポイント 4

$$\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\alpha^n & 0\\ 0 & \beta^n\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\alpha^n & n\alpha^{n-1}\\ 0 & \alpha^n\end{pmatrix}(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

いずれも証明は数学的帰納法で簡単です。

いよいよ本論です。

$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトル $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ を定義します。

$A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ かつ $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ となる $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ が存在するとき，実数 t を A の固有値，$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ を A の固有ベクトルといいます。つまり，行列 A を掛けても方向の変わらないベクトルが A の固有ベクトルで，固有ベクトルが A によって何倍されるかが A の固有値ということです。

$A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ を x，y について整理すると，

$(A-tE)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ となり，ココがポイント 2 より，このような $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ が存在する必要十分条件は，$(A-tE)^{-1}$ が存在しないこと，すなわち $\det(A-tE)=0$

$$A-tE=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}t & 0\\ 0 & t\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a-t & b\\ c & d-t\end{pmatrix}$$ だから，

$\det(A-tE)=0$ より，

$(a-t)(d-t)-bc=0$

$\iff t^2-(a+d)t+ad-bc=0\cdots$③

③を A の固有方程式，③の実数解を A の固有値，③の左辺を A の固有多項式といい，固有値に対応して定まる $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ を A の固有ベクトルといいます。

$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ は原点を通る 1 つの直線上の O 以外の点の集合として定まります。つまり，固有ベクトルは方向が定まり，大きさは 0 以外で自由にとれるということも重要です。

なお，固有方程式はケーリー・ハミルトンの定理

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$$

と同形であることにも注意が必要です。（元来は，ケーリー・ハミルトンの定理が固有方程式と同形なのです。）

では具体例として $A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ について，A の固有値と固有ベクトルを定義だけから求めてみます。

固有値 t，固有ベクトル $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ とすると，

定義より $A\vec{u}=t\vec{u}$，$\vec{u}\neq\vec{0}$

$\iff (A-tE)\vec{u}=\vec{0}$，$\vec{u}\neq\vec{0}$

これを成分で表すと，$A-tE=\begin{pmatrix}4-t & -2\\ 1 & 1-t\end{pmatrix}$ だから，

$\begin{pmatrix}4-t & -2\\ 1 & 1-t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\cdots$①

ここで$(A-tE)^{-1}$が存在すると仮定すると，これを①の両辺に左から掛けて，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=(A-tE)^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 4-t & -2 \\ 1 & 1-t \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$=\cdots=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり，$\vec{u}\neq\vec{0}$と矛盾。

したがって，$(A-tE)^{-1}$は存在せず，

$\det(A-tE)^{-1}=(4-t)(1-t)+2$

$=t^2-5t+6$

$=(t-2)(t-3)=0$

$\therefore\quad t=2,\ 3$

(i)　$t=2$のとき

①は$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\iff x-y=0$

$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$（$t$は任意）

固有ベクトルは$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(ii)　$t=3$のとき

①は$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\iff x-2y=0$

$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$（$s$は任意）

固有ベクトルは$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

以上より，Aの固有値は2と3。

固有値2に対応する固有ベクトルは

$\vec{u}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

固有値3に対応する固有ベクトルは

$\vec{v}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

［固有値が2つある場合のAの対角化とn乗計算］

Aの固有値をα，$\beta(\alpha\neq\beta)$とし，対応する固有ベクトルを$\vec{u}$，$\vec{v}(\vec{u}\not\parallel\vec{v})$とすると，

$$\begin{cases} A\vec{u}=\alpha\vec{u} \\ A\vec{v}=\beta\vec{v} \end{cases}\cdots(*)$$

これを成分で表すと，$\vec{u}=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$，$\vec{v}=\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$となり，

$$\begin{cases} A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{pmatrix} \\ A\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \beta x_2 \\ \beta y_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\iff A\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha x_1 & \beta x_2 \\ \alpha y_1 & \beta y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$P=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$として，

$$AP=P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$\vec{u}\not\parallel\vec{v}$より，$x_1y_2-x_2y_1\neq0$で$P^{-1}$が存在するので，これを両辺に左から掛けて，

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\ [A\text{の対角化}]$$

両辺をn乗して

$$(P^{-1}AP)^n=P^{-1}AP\cdot P^{-1}AP\cdots\cdots P^{-1}AP$$

$$=P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad A^n=P\begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

以上のようにAの固有値が2つ存在するときはAの対角化が可能で，n乗計算ができます。ところが，本問のAは固有方程式が重解をもち，固有値が1つしかないので対角化できません。

このようなときでも，いろいろなn乗計算の方法がありますが，本問は対角行列の代わりに$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$（jordan標準形，三角行列の一種）の形を作ってn乗計算をします。

その方法は以下のとおりです。

Aの固有値をα，固有ベクトルを$\vec{u}$とし，$\vec{u}$と1次独立なベクトル$\vec{v}$をとります。

$A\vec{u}=\alpha\vec{u}$

αは固有方程式の重解だから，ケーリー・ハミルトンの定理は，

$$(A-\alpha E)^2=O$$
$$\iff A^2-2\alpha A+\alpha^2E=O$$
$$\iff A(A-\alpha E)=\alpha(A-\alpha E)$$
$$\therefore\quad A(A-\alpha E)\vec{v}=\alpha(A-\alpha E)\vec{v}$$

固有ベクトルの定義より，$(A-\alpha E)\vec{v}$ は A の固有ベクトルだから $(A-\alpha E)\vec{v}=\vec{u}$ とおける。

$$\therefore\quad A\vec{v}=\vec{u}+\alpha\vec{v}$$

$$\therefore\quad \begin{cases} A\vec{u}=\alpha\vec{u} \\ A\vec{v}=\vec{u}+\alpha\vec{v} \end{cases}$$

$$\therefore\quad \begin{cases} A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{pmatrix} \\ A\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1+\alpha x_2 \\ y_1+\alpha y_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\iff A\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha x_1 & x_1+\alpha x_2 \\ \alpha y_1 & y_1+\alpha y_2 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

$\vec{u}=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ と $\vec{v}=\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ は1次独立であるから，

$P=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ は逆行列をもち，

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^{-1}A\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\cdots②$$

これで目的の形が得られました。あとは n 乗するだけです。

②の両辺を n 乗して，ココがポイント4より，

$$(P^{-1}AP)^n=P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^n$$
$$=\begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad A^n=P\begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

解

(a)

$A=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{cases} 4x-y=kx \\ x+2y=ky \end{cases}\iff \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\iff A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\iff (A-kE)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 4-k & -1 \\ 1 & 2-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

この x，y の連立方程式が $(x,\ y)=(0,\ 0)$ 以外の解をもつとき，$(A-kE)^{-1}$ は存在せず，

$$\varDelta=(4-k)(2-k)+1=k^2-6k+9=(k-3)^2=0$$
$$\therefore\quad k=3$$

(b)

(a) の結果より，$k=3$ であり，$\vec{u}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は (a) の $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と一致する。

$$(A-3E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\iff x=y$$

$\vec{u_1}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ について，$x=y$ だから $\vec{u_1}=\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ より，

$a=1$

また，$(A-kE)\vec{u}=\vec{u_1}$

$$\therefore\quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{u_2}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$ としたとき，

$$x-y=1-b=1$$
$$\therefore\quad b=0$$
$$\therefore\quad P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\cdots=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(c)

$$(P^{-1}AP)^n=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n$$

$$P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix} 3^n & n\cdot 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = P\begin{pmatrix} 3^n & n\cdot 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & n\cdot 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} 3^n & (n+3)3^{n-1} \\ 3^n & n\cdot 3^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} (n+3)3^{n-1} & -n\cdot 3^{n-1} \\ n\cdot 3^{n-1} & -(n-3)3^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$=3^{n-1}\begin{pmatrix} n+3 & -n \\ n & -n+3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^{50}=3^{49}\begin{pmatrix} 53 & -50 \\ 50 & -47 \end{pmatrix}$$

Ⅲ

方　針

三角関数の基本問題です。取りこぼしは許されません。

x 軸正方向となす角が θ のベクトル $\vec{p}$ は，その大きさを r として，$\vec{p}=r(\cos\theta,\ \sin\theta)$ と表せるという事実は一種の約束事項で，

「x 軸の正の向きから $\vec{p}$ へ反時計回りを正として測った角が θ である」と解釈することになっています。

ココがポイント

x 軸正方向となす角 θ，大きさ r のベクトル $\vec{p}$ は，

$$\vec{p}=r(\cos\theta,\ \sin\theta)(0\leqq\theta<2\pi)$$

また，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の 1 次式 $a\sin\theta+b\cos\theta$（a，b は定数）の最大値，最小値は，三角関数の合成

$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

によってただちに求まります。

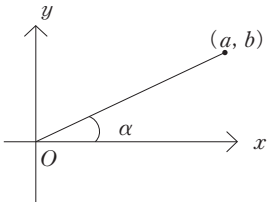
ココがポイント

$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

α は右図の角で

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



（証明）

$a\sin\theta+b\cos\theta$

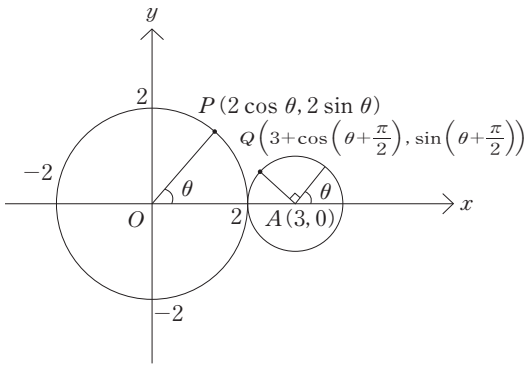
$$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin\theta\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\cos\theta\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

解

(a)



$\overrightarrow{OP}=(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$

$\overrightarrow{OQ}=\left(3+\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$=(3-\sin\theta,\ \cos\theta)$

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=2\cos\theta(3-\sin\theta)+2\sin\theta\cos\theta$

$=6\cos\theta\ (0\leqq\theta<2\pi)$

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ の最大値は 6

(b)

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$

$=(3-\sin\theta-2\cos\theta,\ \cos\theta-2\sin\theta)$

$|\overrightarrow{PQ}|^2=(3-\sin\theta-2\cos\theta)^2+(\cos\theta-2\sin\theta)^2$

$=9+\sin^2\theta+4\cos^2\theta-6\sin\theta-12\cos\theta$
$\quad+4\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta+4\sin^2\theta$
$\quad-4\sin\theta\cos\theta$

$=9+5(\sin^2\theta+\cos^2\theta)-6\sin\theta-12\cos\theta$

$=14-6\sin\theta-12\cos\theta$

(c)

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2=-6(\sin\theta+2\cos\theta)+14$$
$$=-6\sqrt{5}\sin(\theta+\beta)+14$$

$$\begin{cases}\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\\ \sin\beta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\left(0<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

$\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2$ が最大のとき，

$$\theta+\beta=\frac{3}{2}\pi$$

$$\theta=\frac{3}{2}\pi-\beta$$

$$\cos\alpha=\cos\theta$$
$$=\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\beta\right)$$
$$=-\sin\beta=-\frac{2}{\sqrt{5}}$$

よって，$\cos\alpha=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ を満たすような α に対し，$\theta=\alpha$ のときに最大値をとり，その最大値は $14+6\sqrt{5}$

Ⅳ

方　針

前半は極方程式の基本問題です。

直交座標系の方程式に $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を代入すると極方程式が求まります。

$r^2\geqq 0$ から θ の変域が制限されることに注意してください。

本問の曲線はレムニスケート（連珠形）と呼ばれるものです。レムニスケートの例としては，2 定点 $(a,\ 0)$，$(-a,\ 0)$ からの距離の積が一定値 a^2 である曲線 $(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0$（極方程式 $r^2=2a^2\cos 2\theta$）が代表的ですが，本問の曲線はこれを O の周りに $\dfrac{\pi}{4}$ 回転して得られたものです。

後半の面積計算は放射状に分割して，微小な扇形の総和を考えます。

極方程式 $r=f(\theta)$ と 2 つの半直線 $\theta=\theta_1$，$\theta=\theta_2\ (\theta_1<\theta_2)$ で囲まれる部分の面積 S が

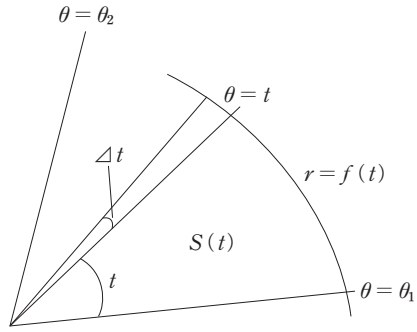
$$S=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{2}r^2d\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{2}\{f(\theta)\}^2\,d\theta$$

で与えられることを用います。以下証明です。

$\theta_1\leqq t\leqq\theta_2$ として，半直線 $\theta=\theta_1$ と $\theta=t$，$r=f(\theta)$ で囲まれる部分の面積を $S(t)$ とする。

$r=f(\theta)$ 上の点 P_0，P_1 をとり，$\angle P_0OP_1=\varDelta t$ とする。

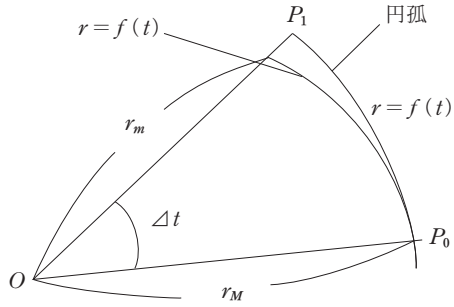
$r=f(\theta)$ の区間 $[t,\ t+\varDelta t]$ における r の最大値を r_M，最小値を r_m とすると，



$$\frac{1}{2}r_m^2\varDelta t\leqq S(t+\varDelta t)-S(t)\leqq\frac{1}{2}r_M^2\varDelta t$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}r_m^2\leqq\frac{S(t+\varDelta t)-S(t)}{\varDelta t}\leqq\frac{1}{2}r_M^2$$

$\varDelta t\to 0$ のとき $r_m\to f(t)$，$r_M\to f(t)$ であるから，



$$\frac{1}{2}\{f(t)\}^2\leqq\lim_{\varDelta t\to 0}\frac{S(t+\varDelta t)-S(t)}{\varDelta t}\leqq\frac{1}{2}\{f(t)\}^2$$

$$\therefore\ \lim_{\varDelta t\to 0}\frac{S(t+\varDelta t)-S(t)}{\varDelta t}=\frac{1}{2}\{f(t)\}^2$$

$$\therefore S'(t)=\frac{1}{2}\{f(t)\}^2$$

$$S(t)=F(t)+C\ \left(\text{ただし}F'(t)=\frac{1}{2}\{f(t)\}^2\right)$$

$S(\theta_1)=0$ より，$F(\theta_1)+C=0$

$\therefore\quad C=-F(\theta_1)$

$\therefore\quad S(t)=F(t)-F(\theta_1)=\int_{\theta_1}^{t}F'(t)\,dt$

$$=\int_{\theta_1}^{t}\frac{1}{2}\{f(t)\}^2\,dt$$

$\therefore\quad S=S(\theta_2)=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{2}\{f(t)\}^2\,dt$

$$=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{2}\{f(\theta)\}^2\,d\theta$$

解

(a)

$C:(x^2+y^2)^2=4a^2xy\cdots①$

$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\ (0\leqq\theta<2\pi)$

とおいて①に代入すると，

$r^4=4a^2r^2\cos\theta\sin\theta=2a^2r^2\sin2\theta\cdots②$

$\Longleftrightarrow r^2=0$ または $r^2=2a^2\sin2\theta\cdots③$

③は $r=0$, $\sin2\theta=0$ のとき成り立つので，極 O を通っている。よって，②と③は同値である。

$\therefore\quad r^2=2a^2\sin2\theta$

ところで，$r^2\geqq0$ であるから，$\sin2\theta\geqq0$

$\therefore\quad 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2},\ \pi\leqq\theta\leqq\frac{3}{2}\pi$

(b)

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ において，$r=\sqrt{2a^2\sin2\theta}$

この右辺は $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，つまり $0<2\theta<\pi$ において，$2\theta=\frac{\pi}{2}$，つまり $\theta=\frac{\pi}{4}$ のときに最大値をとる。

この時 $r=\sqrt{2}\,a$

M の極座標 $(r,\ \theta)=\left(\sqrt{2}\,a,\ \frac{\pi}{4}\right)$ より，M の直交座標 $(x,\ y)=\left(\sqrt{2}\,a\cos\frac{\pi}{4},\ \sqrt{2}\,a\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$=(a,\ a)$$

これが $(x,\ y)=(2,\ 2)$ なので，$a=2$

(c)

$a=2$ より

$C:r^2=8\sin2\theta$

$\Longleftrightarrow f(x,y)=(x^2+y^2)^2-16xy=0$

$f(-x,-y)=f(x,\ y)$ だから C は原点対称である。

$S=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}r^2d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}8\sin2\theta d\theta=[-4\cos2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}=8$

来月号では，聖マリアンナ医科大学の数学を攻略しますので，ご期待ください！

全12校の掲載予定は以下のとおりとなっております。

第37回／４月号　東京女子医科大学
第38回／５月号　杏林大学医学部
第39回／６月号　聖マリアンナ医科大学
第40回／７月号　金沢医科大学
第41回／８月号　日本大学医学部
第42回／９月号　東邦大学医学部
第43回／10月号　愛知医科大学
第44回／11月号　岩手医科大学医学部
第45回／12月号　東京医科大学
第46回／１月号　東京慈恵会医科大学
第47回／２月号　北里大学医学部
第48回／３月号　昭和大学医学部

「東大螢雪会」では，本誌をご覧の方々の学力アップのために，主要な私立大学医学部の予想問題を無料でプレゼントしています。ご希望の方は，「東大螢雪会」のホームページ（http://www.keisetsukai.com）（PC・携帯）からお問い合わせください。