東大螢雪会 医学部数学 攻略演習

マンツーマン指導で医歯薬学部に多くの合格者を輩出している「東大螢雪会」では，主要な私立大学医学部の予想問題を作成しています。このコーナーでは，「東大螢雪会」の作成した予想問題を用いて，主要な私立大学医学部の数学を攻略するための演習を行います。毎号１校分の演習を行い，全12校の連載となる予定です。

今月号では，岩手医科大学医学部の数学を攻略します！

第31回 岩手医科大学医学部 編

東大螢雪会講師 小池 淳

例年の岩手医科大学医学部の数学は，制限時間60分で大問３題の出題です。標準的な問題が多く，難易度は高くないものの，多少非定型な問題も含まれます。また，確率の出題頻度が高く，差がつきそうな出題がなされているのも特徴です。今回の予想問題も $\boxed{1}$ の出来不出来が勝負の分かれ目でしょう。

$\boxed{1}$ １つのサイコロを４回繰り返し投げるという試行を行う。出た目の数字の積 M について

(1) M が４の倍数になる確率を求めよ。

(2) M が６の倍数になる確率を求めよ。

$\boxed{2}$ １辺の長さが１の正四面体 $OABC$ がある。辺 OA の中点を M とし，点 P は辺 OB 上を動くとする。線分 OP の長さを x とするとき，次の問いに答えよ。

(1) PM^2 を x で表せ。

(2) $\angle PCM=\theta$ とするとき，$\cos\theta$ を x で表せ。

(3) $\triangle CMP$ の面積を x を用いて表せ。

(4) $\triangle CMP$ の面積の最小値を求めよ。

$\boxed{3}$ 数列 $\{a_n\}$ が $a_1=4$，$a_{n+1}=\sqrt{a_n+6}$ （$n=1,\ 2,\ 3\cdots\cdots$）で定義されているとき

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在すると仮定し，その値 α を求めよ。

(2) 設問(1)で求めた α に対して

$$|a_{n+1}-\alpha| \leqq \frac{1}{3}|a_n-\alpha| \quad (n=1,\ 2,\ 3\cdots\cdots)$$

が成り立つことを示せ。

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ を示せ。

1

方　針

ココがポイント

「積が●の倍数」という事象については徹底的に余事象を考える。

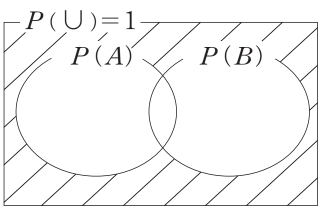
例えば，「積が 2 の倍数」の余事象は「すべての回で奇数が出る」となり，「積が 4 の倍数」の余事象は「4 の倍数でない偶数が 1 回出て，後は全て奇数が出る」または「全ての回で奇数が出る」となります。「積が 6 の倍数」の余事象はややこしそうですが，下のベン図を利用するとわかりやすくなります。ここでも否定（余事象）を考えるのがコツです。

「2 の倍数が 1 回も出ない」という事象を A

「3 の倍数が 1 回も出ない」という事象を B

として確率 $P(A)$，$P(B)$，$P(A\cap B)$をそれぞれ求めます。

ココがポイント



$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

求める確率は斜線部の確率で

$1-P(A\cup B)$

なお，本問の試行回数 4 にはとりたてて意味がないので，一般の n で計算して最後に $n=4$ を代入する方が良いでしょう。

解

(1)

Mが 4 の倍数にならないのは

「1 回だけ 2 または 6 が出て，残りの $(n-1)$ 回は奇数が出る」または「n 回とも奇数が出る」場合で，その確率は

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}{}_nC_1+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{2}{3}n+1\right)$$

したがって，求める確率は

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{2}{3}n+1\right)=1-\frac{1}{16}\cdot\frac{11}{3}=\frac{37}{48}$$

(2)

Mが 6 の倍数にならない確率は **方　針** の図より

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$P(A)=$すべて奇数が出る確率$=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$P(B)=$すべて 3 の倍数以外が出る確率$=\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

$P(A\cap B)$

＝すべて「奇数かつ 3 の倍数以外」が出る確率

= すべて 1 または 5 が出る確率$=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

$$P(A\cup B)=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

求める確率は

$$1-P(A\cup B)=1-\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}\ (n=4)$$

$$=1-\left(\frac{1}{2}\right)^4-\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{1}{3}\right)^4$$

$$=\frac{2^4\cdot3^4-3^4-2^8+2^4}{2^4\cdot3^4}$$

$$=\frac{(2^4-1)3^4-2^4(2^4-1)}{2^4\cdot3^4}$$

$$=\frac{15\cdot65}{2^4\cdot3^4}=\frac{325}{432}$$

2

方　針

空間ベクトルの基本問題で取りこぼしは許されません。ベクトルを使って，なす角と三角形の面積を計算します。

Ⅰ．なす角 θ について

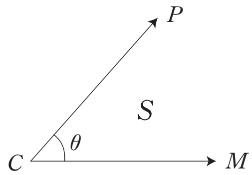
$\angle PCM=\theta$ とすると，θ は 2 つのベクトル $\overrightarrow{CM}$ と $\overrightarrow{CP}$ のなす角でありベクトルの内積の図形的定義より

$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CP}=\left|\overrightarrow{CM}\right|\left|\overrightarrow{CP}\right|\cos\theta$

$$\therefore \cos\theta = \frac{\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CP}}{|\overrightarrow{CM}||\overrightarrow{CP}|} \quad \cdots ①$$

3つの要素 $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CP}$，$|\overrightarrow{CM}|$，$|\overrightarrow{CP}|$ をそれぞれ計算します。3つの基本ベクトル $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ を用います。

Ⅱ．△CMP の面積について



$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{CM}||\overrightarrow{CP}|\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}|\overrightarrow{CM}||\overrightarrow{CP}|\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$=\frac{1}{2}|\overrightarrow{CM}||\overrightarrow{CP}|\sqrt{1-\left(\frac{\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CP}}{|\overrightarrow{CM}||\overrightarrow{CP}|}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{CM}|^2|\overrightarrow{CP}|^2-(\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CP})^2} \quad \cdots ②$$

①，②はいずれも公式として使用できます。

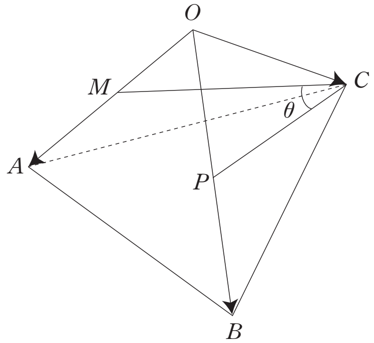
解

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。

$\overrightarrow{OP}=x\vec{b}$，$\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$ である。

また，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\dfrac{1}{2}$ となる。



(1)

$$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}$$

$$=\frac{1}{2}\vec{a}-x\vec{b}$$

$$|\overrightarrow{PM}|^2=\left|\frac{1}{2}\vec{a}-x\vec{b}\right|^2=\frac{1}{4}|\vec{a}|^2-x\vec{a}\cdot\vec{b}+x^2|\vec{b}|^2$$

$$=x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$$

$$\therefore PM^2=x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$$

(2)

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CP}}{|\overrightarrow{CM}||\overrightarrow{CP}|}$$

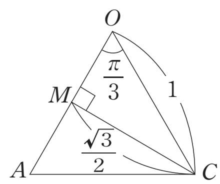
$$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CP}=(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC})$$

$$=(x\vec{b}-\vec{c})\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{c}\right)$$

$$=\frac{1}{2}x\vec{a}\cdot\vec{b}-x\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{c}\cdot\vec{a}+|\vec{c}|^2$$

$$=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+1$$

$$=\frac{1}{4}(3-x) \quad \cdots ①$$



$$|\overrightarrow{CM}|=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cdots ②$$

$$|\overrightarrow{CP}|^2=|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}|^2$$

$$=|x\vec{b}-\vec{c}|^2$$

$$=x^2|\vec{b}|^2-2x\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2$$

$$=x^2-x+1$$

$$\therefore |\overrightarrow{CP}|=\sqrt{x^2-x+1} \quad \cdots ③$$

①，②，③を用いると

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CP}}{|\overrightarrow{CM}||\overrightarrow{CP}|}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}(3-x)}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$=\frac{3-x}{2\sqrt{3}\sqrt{x^2-x+1}}=\frac{\sqrt{3}(3-x)}{6\sqrt{x^2-x+1}}$$

(3)

$$\triangle CMP=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{CM}|^2|\overrightarrow{CP}|^2-(\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CP})^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}(x^2-x+1)-\frac{1}{16}(3-x)^2}$$
$$=\frac{1}{8}\sqrt{12(x^2-x+1)-(9-6x+x^2)}$$
$$=\frac{1}{8}\sqrt{11x^2-6x+3}$$

(4)

$$\triangle CMP=\frac{1}{8}\sqrt{11x^2-6x+3}$$
$$=\frac{1}{8}\sqrt{11\left(x^2-\frac{6}{11}x\right)+3}$$
$$=\frac{1}{8}\sqrt{11\left(x-\frac{3}{11}\right)^2-\frac{9}{11}+3}$$
$$=\frac{1}{8}\sqrt{11\left(x-\frac{3}{11}\right)^2+\frac{24}{11}}\quad(x>0)$$

$x=\dfrac{3}{11}$ のとき，最小値 $\dfrac{1}{8}\sqrt{\dfrac{24}{11}}=\dfrac{\sqrt{66}}{44}$

3

方　針

一般項が求まらない場合の2項間漸化式 $a_{n+1}=f(a_n)$ で定義された数列 $\{a_n\}$ の極限についての問題です。次のような手順で考えます。

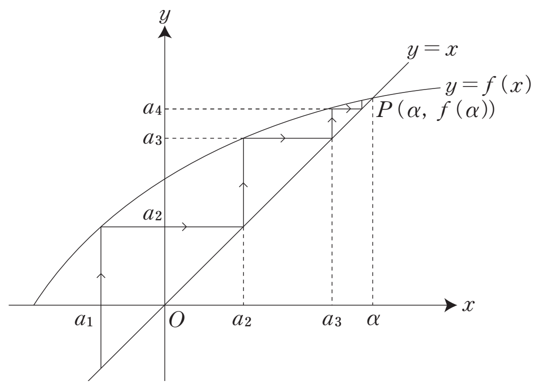
手順1　　極限値を予想します。

$a_n\to\alpha$ と仮定すると $a_{n+1}\to\alpha$ でもあるので

$a_{n+1}=f(a_n)$ より $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)$

$\therefore\alpha=f(\alpha)$

つまり，連立方程式 $\begin{cases}y=f(x)\\y=x\end{cases}$ の解が $(\alpha,\ \alpha)$ ということです。これは下図のようにグラフを用いて説明（≠証明）できます。



上図のような場合，まず $(a_1,\ 0)$ をとって

$(a_1,\ a_1)\xrightarrow{\text{たて}}(a_1,\ f(a_1))\xrightarrow{\text{よこ}}(a_2,\ a_2)$

の移動を繰り返すと，$(a_n,\ a_n)$ は $(\alpha,\ f(\alpha))$ に限りなく近づくことが見て取れます。

ただし，$y=x$ と $y=f(x)$ の共有点が2つ以上ある場合や，初項 a_1 のとり方によって極限が異なってくる場合には注意が必要です。

手順2　　$|a_{n+1}-\alpha|\leqq r|a_n-\alpha|$ …① を満たす1より小さい正の定数 r を見出します。

①を示せれば，これを繰り返し使うことにより

$$|a_n-\alpha|\leqq r|a_{n-1}-\alpha|$$
$$\leqq r^2|a_{n-2}-\alpha|$$
$$\leqq\cdots$$
$$\leqq r^{n-1}|a_1-\alpha|$$ となり

$0\leqq|a_n-\alpha|\leqq r^{n-1}|a_1-\alpha|$

$n\to\infty$ としてはさみ打ちの原理から

$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n-\alpha|=0$

$\iff\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$ となります。

①の形の不等式の作り方

漸化式 $a_{n+1}=f(a_n)$ の両辺から α を引いて

$a_{n+1}-\alpha=f(a_n)-f(\alpha)$ と変形します。

$(\because\alpha=f(\alpha))$

すると右辺には色々な「技」が使えて，$a_n-\alpha$ を因数として取り出すことができます。いろいろな技とは

(イ)　$f(x)$ が有理式であれば，因数定理により $a_n-\alpha$ を因数に持つことがわかり，因数分解することができる。無理式であれば，分子の有理化によって分子から因数 $a_n-\alpha$ を取り出すことができる。

(ロ)　平均値の定理によって

$f(a_n)-f(\alpha)=(a_n-\alpha)f'(c)$　…②

と表されて，$f'(c)$のとり得る値を評価することによって$|f'(c)|\leqq r$を示す。

すると両辺に$|a_n-\alpha|$を掛けることによって

$|(a_n-\alpha)f'(c)|\leqq r|a_n-\alpha|$

これと②より

$|a_{n+1}-\alpha|\leqq r|a_n-\alpha|$ (∵$f(a_n)=a_{n+1}$, $f(\alpha)=\alpha$)

①を得ることができる。

本問は(イ)の無理式のパターンです。

なお，$\lim_{n\to\infty}|a_n-\alpha|=0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$

はこのタイプの問題で必ずといっていい程利用する基本的事実です。

解

(1)

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$と仮定すると$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$

$a_{n+1}=\sqrt{a_n+6}$より$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n+6}$

$\therefore \alpha=\sqrt{\alpha+6}$

$\Longleftrightarrow \alpha^2=\alpha+6,\ \alpha\geqq 0$

$\Longleftrightarrow (\alpha-3)(\alpha+2)=0,\ \alpha\geqq 0$

$\therefore \alpha=3$

(2)

$a_{n+1}=\sqrt{a_n+6}$の両辺から$3(=\alpha)$を引いて右辺の分子を有理化すると

$$a_{n+1}-3=\sqrt{a_n+6}-3=\frac{a_n-3}{\sqrt{a_n+6}+3}$$

$$\therefore |a_{n+1}-3|=\frac{1}{\sqrt{a_n+6}}|a_n-3| \quad \cdots①$$

ここで$\sqrt{a_n+6}+3\geqq 3$であるから

$$0<\frac{1}{\sqrt{a_n+6}+3}\leqq\frac{1}{3}$$

$|a_n-3|$を掛けて

$$0\leqq\frac{1}{\sqrt{a_n+6}+3}|a_n-3|\leqq\frac{1}{3}|a_n-3|$$

$$\Longleftrightarrow |a_{n+1}-3|\leqq\frac{1}{3}|a_n-3| \quad (∵①)$$

(3)

(2)の結果より

$$|a_n-3|\leqq\frac{1}{3}|a_{n-1}-3| \quad (n\geqq 2)$$

$$\therefore |a_n-3|\leqq\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}|a_{n-2}-3|$$

$$\leqq\cdots\leqq\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}|a_1-3|$$

$$\therefore 0\leqq|a_n-3|\leqq\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$n\to\infty$の極限を考えて

$$0\leqq\lim_{n\to\infty}|a_n-3|\leqq\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}|a_n-3|=0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=3$$

来月号では，愛知医科大学の数学を攻略しますので，ご期待ください！

全12校の掲載予定は以下のとおりとなっております。

第25回／４月号　杏林大学医学部
第26回／５月号　東京女子医科大学
第27回／６月号　金沢医科大学
第28回／７月号　聖マリアンナ医科大学
第29回／８月号　東邦大学医学部
第30回／９月号　日本大学医学部
第31回／10月号　岩手医科大学医学部
第32回／11月号　愛知医科大学
第33回／12月号　東京慈恵会医科大学
第34回／１月号　東京医科大学
第35回／２月号　昭和大学医学部
第36回／３月号　北里大学医学部