

東大螢雪会 **医 学 部 数 学** 攻略演習

マンツーマン指導で医歯薬学部にも多くの合格者を輩出している「東大螢雪会」では、主要な私立大学医学部の予想問題を作成しています。このコーナーでは、「東大螢雪会」の作成した予想問題を用いて、主要な私立大学医学部の数学を攻略するための演習を行います。毎号1校分の演習を行い、全12校の連載となる予定です。

今月号では、杏林大学医学部の数学を攻略します！

第18回 杏林大学医学部 編

東大螢雪会講師 小池 淳

杏林大学医学部の数学は制限時間60分で大問4題の形式をとっていますが、実質的には大問は1題程度で、残りは小問集合です。受験勉強の努力が結果に反映されやすい素直な出題ですが、ちょっとした引っかけ問題もあり、時間的にもやや厳しいので、7割程度の得点で合格圏に入るでしょう。

I 以下の問いに答えよ。

- (1) $x^2+5y^2+4xy-6x-4y-2$ は $x = \boxed{\text{アイ}}$, $y = \boxed{\text{ウエ}}$ のときに最小値 $\boxed{\text{オカキ}}$ をとる。
- (2) $4x^2-3y^2+xy-14x+14y-8$ を因数分解すると $(\boxed{\text{ク}}x - \boxed{\text{ケ}}y + \boxed{\text{コ}})(x+y - \boxed{\text{サ}})$ であるので $4x^2-3y^2+xy-14x+14y-9=0$ を満たす整数の組 (x, y) は, $x = \boxed{\text{シ}}$, $y = \boxed{\text{ス}}$ である。
- (3) $\frac{\sin 2\theta+1}{\cos 2\theta+3}$ の最小値は $\boxed{\text{セ}}$ で、最大値は $\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

II

4個のさいころを投げ、それぞれの出た目を a, b, c, d とし, $X = 1000a + 100b + 10c + d$ とおく。

- (1) $X > 5000$ となる確率は $\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。
- (2) $X < 3333$ となる確率は $\frac{\boxed{\text{ウエオ}}}{\boxed{\text{カキク}}}$ である。
- (3) $a \leq b \leq c \leq d$ となる確率は $\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ である。
- (4) X の期待値は $\frac{\boxed{\text{シスセソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

Ⅲ

- (1) $2^{89}, 3^{56}$ はともに $\boxed{\text{アイ}}$ 桁の自然数で、最高位の数はそれぞれ $\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$ である。また、 $2^{89}+3^{56}$ は $\boxed{\text{オカ}}$ 桁の自然数で、最高位の数は $\boxed{\text{キ}}$, 最高位の次に並ぶ数は $\boxed{\text{ク}}$ である。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$, $\log_{10} 7 = 0.8451$, $\log_{10} 11 = 1.0414$, $\log_{10} 13 = 1.1139$ としてよい。
- (2) $|\vec{a}-2\vec{b}|=2, |3\vec{a}+\vec{b}|=1$ とするとき、 $\vec{p}=\vec{a}-2\vec{b}, \vec{q}=3\vec{a}+\vec{b}$ とおくと
 $\vec{a}=\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\vec{p}+\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\vec{q}, \vec{b}=-\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\vec{p}+\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\vec{q}$ であるから、 $|\vec{a}+2\vec{b}|$ の最大値は $\boxed{\text{チ}}$ で、最小値は $\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ となる。

Ⅳ

xy 平面上的の $E: 17x^2+12xy+8y^2=4$, 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ を考える。

E の式を y について解くと、 $y=\frac{\boxed{\text{アイ}}x\pm\sqrt{\boxed{\text{ウ}}-\boxed{\text{エオ}}x^2}}{\boxed{\text{カ}}}$

であり、 x の変域は $\frac{\boxed{\text{キク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}\leq x\leq\frac{\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。

また、 E で囲まれる面積は $\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\pi$ である。

さらに、 A で表される 1 次変換によって E は $E': \frac{x^2}{\boxed{\text{タ}}}+y^2=1$ に移る。このとき、 E が A で表される 1 次変換によって移された曲線上の点と点 $(\frac{1}{2}, 0)$ との距離の最小値は $\frac{\sqrt{\boxed{\text{チツ}}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である。

(答)

- Ⅰ (1) $\text{アイ}=-4, \text{ウエ}=11$
 $\text{オカキ}=-27$
 (2) $\text{ク}=4, \text{ケ}=3, \text{コ}=2$
 $\text{サ}=4, \text{シ}=2, \text{ス}=3$
 (3) $\text{セ}=0, \frac{\text{ソ}}{\text{タ}}=\frac{3}{4}$
- (2) $\frac{\text{ケ}}{\text{コ}}=\frac{1}{7}, \frac{\text{サ}}{\text{シ}}=\frac{2}{7}$
 $\frac{\text{ス}}{\text{セ}}=\frac{3}{7}, \frac{\text{ソ}}{\text{タ}}=\frac{1}{7}$
 $\text{チ}=2, \frac{\text{ツ}}{\text{テ}}=\frac{6}{7}$
- Ⅱ (1) $\frac{\text{ア}}{\text{イ}}=\frac{1}{3}$
 (2) $\frac{\text{ウエオ}}{\text{カキク}}=\frac{259}{648}$
 (3) $\frac{\text{ケ}}{\text{コサ}}=\frac{7}{72}$
 (4) $\frac{\text{シスセソ}}{\text{タ}}=\frac{7777}{2}$
- Ⅳ $y=\frac{-3x+\sqrt{8-25x^2}}{4}$
 $-\frac{2\sqrt{2}}{5}\leq x\leq\frac{2\sqrt{2}}{5}$
 面積 $=\frac{2}{5}\pi$
 $E': \frac{x^2}{4}+y^2=1$
 最小値 $=\frac{\sqrt{33}}{6}$
- Ⅲ (1) $\text{アイ}=27, \text{ウ}=6, \text{エ}=5$
 $\text{オカ}=28, \text{キ}=1, \text{ク}=1$

I

方針

(1)

独立 2 変数 2 次関数の最小値の問題です。まず 1 つの文字の 2 次関数とみて整理して、平方完成すれば自然に解けます。

(2)

整数解問題の基本形です。

$$f(x, y) \cdot g(x, y) = N$$

として整数 N の正負の約数を考えます。

(3)

三角関数の定義

「 $P(\cos t, \sin t)$ は単位円周上の点の座標」

が決め手です ($2\theta = t$)。

定点 $(-3, -1)$ と動点 P を通る直線の傾きの最大・最小問題となり円の接線の問題に帰着されます。

$\tan \theta = t$ とおいて

$$\cos 2\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin 2\theta = \frac{2t}{1+t^2} \text{ より}$$

$$\frac{\sin 2\theta + 1}{\cos 2\theta + 3} = \dots = \frac{(t+1)^2}{2(t^2+2)} \text{ (以下は微分して) 増減を調べる}$$

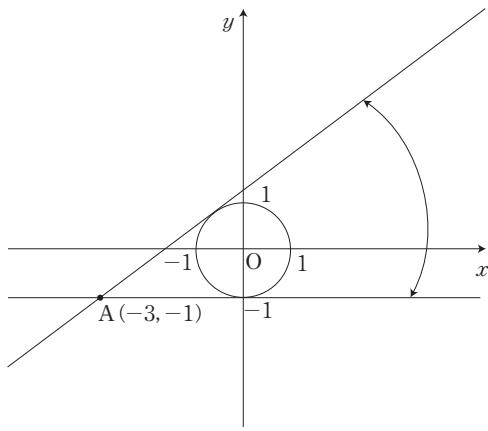
と考えた人もいるでしょうが、これは損な方法でしょう。

ココがポイント

$(\cos t, \sin t)$ は円周上の動点である。

$A(-3, -1), P(\cos t, \sin t)(2\theta = t)$ と

すると、 $\frac{\sin 2\theta + 1}{\cos 2\theta + 3}$ は AP の傾きになる。



さらにもっと複雑な形、たとえば

$$f(\theta) = \frac{1+2\sin\theta+\cos\theta}{2+\sin\theta+\cos\theta} \text{ のような場合も考えて}$$

おきます。

$$\tan \frac{\theta}{2} = t \text{ とおくテクニックを用いると}$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin \theta = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

$$f(\theta) = \dots = \frac{4t+2}{t^2+2t+3} \text{ (以下は微分して) 増減を調べる}$$

しかし、ここでも $\cos \theta = X, \sin \theta = Y$ として単位円周上の点 (X, Y) を考える方が簡単で、

$$f(\theta) = \frac{1+2Y+X}{2+Y+X} = k$$

$$\Leftrightarrow (k-1)X + (k-2)Y + 2k-1 = 0$$

これは単位円周上の点 (X, Y) が

$$\text{直線 } (k-1)X + (k-2)Y + 2k-1 = 0 \dots \textcircled{1}$$

上の点でもある、つまり、「円と直線が共有点をもつ」ということです。

円の中心と①との距離 \leq 円の半径より

$$\frac{|2k-1|}{\sqrt{(k-1)^2+(k-2)^2}} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow (2k-1)^2 \leq (k-1)^2+(k-2)^2$$

$$\Leftrightarrow (k+2)(k-1) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq k \leq 1$$

$$-2 \leq f(\theta) \leq 1$$

これは公式よりも定義が優先する好例です。

解

(1)

$$x^2+5y^2+4xy-6x-4y-2$$

$$= x^2+(4y-6)x+5y^2-4y-2$$

$$= (x+2y-3)^2+y^2+8y-11$$

$$= (x+2y-3)^2+(y+4)^2-27 \geq -27$$

$$\text{等号成立は } \begin{cases} y+4=0 \\ x+2y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (11, -4)$$

のとき

$$x = 11, y = -4 \text{ のとき最小値 } -27$$

(2)

$$\begin{aligned}
& 4x^2 - 3y^2 + xy - 14x + 14y - 8 \\
&= 4x^2 + (y-14)x - (3y^2 - 14y + 8) \\
&= 4x^2 + (y-14)x - (3y-2)(y-4) \\
&= (4x-3y+2)(x+y-4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4x^2 - 3y^2 + xy - 14x + 14y - 9 = 0 \\
&\Leftrightarrow 4x^2 - 3y^2 + xy - 14x + 14y - 8 = 1 \\
&\Leftrightarrow (4x-3y+2)(x+y-4) = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} 4x-3y+2=1 \\ x+y-4=1 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (2, 3)$$

または

$$\begin{cases} 4x-3y+2=-1 \\ x+y-4=-1 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{6}{7}, \frac{15}{7}\right)$$

 x, y は整数なので

$$\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$$

(3)

$\frac{\sin 2\theta + 1}{\cos 2\theta + 3}$ は単位円周上の点 $(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$ と

点 $(-3, -1)$ を通る直線の傾きなので

これを m とおいて

直線 $y = m(x+3) - 1 \cdots \textcircled{1}$ が単位円と共有点をもつような m の範囲を考える。

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow mx - y + (3m - 1) = 0$$

中心 $(0, 0)$ との距離 \leq 半径より

$$\frac{|3m-1|}{\sqrt{m^2+1}} \leq 1$$

両辺 ≥ 0 なので 2 乗しても同値となり

$$\begin{aligned}
(3m-1)^2 &\leq m^2+1 \\
\Leftrightarrow 2m(4m-3) &\leq 0
\end{aligned}$$

$$0 \leq m \leq \frac{3}{4}$$

最小値は 0, 最大値は $\frac{3}{4}$

II

方針

確率の基本的な問題ですが

(3) は易しくはありません。以下の 2 通りの考え方があります。

組合せ, もしくは重複組合せです。

(考え方 1) 組合せ

整数 x, y について

$$x \leq y \Leftrightarrow x < y+1 \text{ が成り立つ。}$$

本問の a, b, c, d について

$$a \leq b \leq c \leq d$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 6$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq a < b+1 < c+2 < d+3 \leq 9$$

(a, b, c, d) と $(a, b+1, c+2, d+3)$ とは 1 対 1 に対応するのでこれらの組の個数は等しく,

1 から 9 の異なる整数から 4 つの整数をとる組合せ ${}_9C_4$ 通りである。

(考え方 2) 重複組合せ

$$1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 6 \text{ を満たす}$$

(a, b, c, d) の組は 4 回ふって出た

サイコロの目の回数について,

1 が x_1 回, 2 が x_2 回, \dots , 6 が x_6 回出たと考えると

$$(*) : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 4 \\ x_k \geq 0 \quad (k=1, 2, \dots, 6) \end{cases}$$

(*) を満たす $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ と (a, b, c, d) は 1 対 1 に対応するので個数は等しい。その個数は 6 種類のものから重複を許して 4 コとる重複組合せ (もしくは 4 個の \circ と $(6-1)$ 個の $/$ の並べ方) で ${}_6H_4 = {}_9C_4 (= {}_9C_5)$ 通りである。

(4) の期待値の計算では

「和の期待値」= 「期待値の和」

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

$$E(kX) = kE(X) \text{ を用います。}$$

解

(1)

$a=5$ または $a=6$ の場合だから

$$P(X > 500) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(2)

$a \leq 2$ の場合と

$a=3, b \leq 2$ の場合

$a=3, b=3, c \leq 2$ の場合

$a=3, b=3, c=3, d \leq 2$ の場合

でこれらは排反で全ての場合を尽くしている。

$$P(X < 3333)$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{259}{648}$$

(3)

$$\frac{{}_9C_4}{6^4} = \frac{7}{72}$$

(4)

$$\begin{aligned} E(X) &= E(1000a + 100b + 10c + d) \\ &= 1000E(a) + 100E(b) + 10E(c) + E(d) \end{aligned}$$

ここで

$$E(a) = E(b) = E(c) + E(d)$$

$$= \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{7}{2}$$

$$\therefore E(X) = 1111 \times \frac{7}{2} = \frac{7777}{2}$$

III

方針

(1)

おなじみの桁数の問題ですが、最高位の次の位の値まで求めさせるところが珍しいと言えるでしょ

う。常用対数の値を $\frac{1}{2}$ きざみで調べます。

$$\log_{10} 2 = 0.3010 \Leftrightarrow 10^{0.3010} = 2$$

$$\log_{10} 3 = 0.4771 \Leftrightarrow 10^{0.4771} = 3$$

$$\log_{10} 4 = 0.6020 \Leftrightarrow 10^{0.6020} = 4$$

$$\log_{10} 5 = 1 - \log_{10} 2 = 0.6990 \Leftrightarrow 10^{0.6990} = 5$$

$$\log_{10} 6 = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 0.7781 \Leftrightarrow 10^{0.7781} = 6$$

$$\log_{10} 7 = 0.8451 \Leftrightarrow 10^{0.8451} = 7$$

$$\log_{10} 8 = 3 \log_{10} 2 = 0.9030 \Leftrightarrow 10^{0.9030} = 8$$

$$\log_{10} 9 = 2 \log_{10} 3 = 0.9542 \Leftrightarrow 10^{0.9542} = 9$$

以上の書き換えは基本です。

(2)

ベクトルがたくさん出てきて複雑そうですが、置き換えの式を \vec{a}, \vec{b} について解けば \vec{a}, \vec{b} は消去できた (存在が確認できた) という事なので、 \vec{p}, \vec{q} だけの問題になります。

ココがポイント

$$\begin{cases} |\vec{p}| = r_1 \\ |\vec{q}| = r_2 \end{cases} \text{ のとき}$$

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = r_1 r_2 \cos \theta \text{ より}$$

(θ は \vec{p}, \vec{q} のなす角)

$$-r_1 r_2 \leq \vec{p} \cdot \vec{q} \leq r_1 r_2$$

解

(1)

$$\log_{10} 2^{89} = 89 \log_{10} 2 = 26.7890$$

$$\therefore 2^{89} = 10^{26.789} = 10^{0.7890} \cdot 10^{26}$$

$$\log_{10} 3^{56} = 56 \log_{10} 3 = 26.7176$$

$$\therefore 3^{56} = 10^{26.7176} = 10^{0.7176} \cdot 10^{26}$$

$$6 < 10^{0.7890} < 7$$

$$(6 = 10^{0.7781}, 7 = 10^{0.8451})$$

$$5 < 10^{0.7176} < 6$$

$$(5 = 10^{0.6990}, 7 = 10^{0.7781})$$

$$\therefore \begin{cases} 6 \cdot 10^{26} < 2^{89} < 7 \cdot 10^{26} \\ 5 \cdot 10^{26} < 3^{56} < 6 \cdot 10^{26} \end{cases}$$

$2^{89}, 3^{56}$ はいずれも27桁の自然数で

最高位の数はそれぞれ 6, 5,

$$\text{また, } 2^{89} + 3^{56} = (10^{0.7890} + 10^{0.7176}) \cdot 10^{26} \dots \textcircled{1}$$

ところで

$$\log_{10} \frac{11}{2} = 1.0414 - 0.3010 = 0.7404$$

$$\log_{10} \frac{13}{2} = 1.1139 - 0.3010 = 0.8129 \text{ より}$$

$$6 = 10^{0.7781} < 10^{0.7890} < 10^{0.8129} = \frac{13}{2}$$

$$\therefore 6 < 10^{0.7890} < 6.5 \cdots \textcircled{2}$$

$$5 = 10^{0.6990} < 10^{0.7176} < 10^{0.7398} = \frac{11}{2}$$

$$\therefore 5 < 10^{0.7176} < 5.5 \cdots \textcircled{3}$$

②+③より

$$11 < 10^{0.7890} + 10^{0.7176} < 12$$

各辺に 10^{26} をかけて、①より

$$11 \cdot 10^{26} < 2^{89} + 3^{56} < 12 \cdot 10^{26}$$

$$\Leftrightarrow 1.1 \cdot 10^{27} < 2^{89} + 3^{56} < 1.2 \cdot 10^{27}$$

よって $2^{89} + 3^{56}$ は28桁で最高位、その次の位の数は順に1, 1

(2)

$$\left| \begin{matrix} \vec{a} - 2\vec{b} \\ 3\vec{a} + \vec{b} \end{matrix} \right| = 2 \cdots \textcircled{1}$$

$$\left| \begin{matrix} 3\vec{a} + \vec{b} \\ \vec{a} - 2\vec{b} \end{matrix} \right| = 1 \cdots \textcircled{2}$$

$$\begin{cases} \vec{p} = \vec{a} - 2\vec{b} \\ \vec{q} = 3\vec{a} + \vec{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} = \frac{1}{7}(\vec{p} + 2\vec{q}) \\ \vec{b} = \frac{1}{7}(-3\vec{p} + \vec{q}) \end{cases}$$

$$\vec{a} + 2\vec{b} = \frac{1}{7}(\vec{p} + 2\vec{q}) + \frac{2}{7}(-3\vec{p} + \vec{q})$$

$$= \frac{1}{7}(-5\vec{p} + 4\vec{q})$$

①, ②より

$$\left| \begin{matrix} \vec{p} \\ \vec{q} \end{matrix} \right| = \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \text{ のときの}$$

$$\left| \vec{a} + 2\vec{b} \right| = \frac{1}{7} \left| -5\vec{p} + 4\vec{q} \right| \text{ の最大値, 最小値を求}$$

める。

$$\begin{aligned} \left| -5\vec{p} + 4\vec{q} \right|^2 &= 25 \left| \vec{p} \right|^2 - 40 \vec{p} \cdot \vec{q} + 16 \left| \vec{b} \right|^2 \\ &= 116 - 40 \vec{p} \cdot \vec{q} \end{aligned}$$

\vec{p}, \vec{q} のなす角を θ とすると

$$\begin{aligned} \vec{p} \cdot \vec{q} &= \left| \vec{p} \right| \left| \vec{q} \right| \cos \theta \\ &= 2 \cos \theta \end{aligned}$$

$$(-1 \leq \cos \theta \leq 1)$$

$$\therefore -2 \leq \vec{p} \cdot \vec{q} \leq 2$$

$$36 \leq 116 - 40 \vec{p} \cdot \vec{q} \leq 196$$

$$\therefore 36 \leq \left| -5\vec{p} + 4\vec{q} \right|^2 \leq 196$$

$$\therefore 6 \leq \left| -5\vec{p} + 4\vec{q} \right| \leq 14$$

$$\therefore \frac{6}{7} \leq \frac{1}{7} \left| -5\vec{p} + 4\vec{q} \right| \leq 2$$

$$\therefore \frac{6}{7} \leq \left| \vec{a} + 2\vec{b} \right| \leq 2$$

最大値は2, 最小値は $\frac{6}{7}$

IV

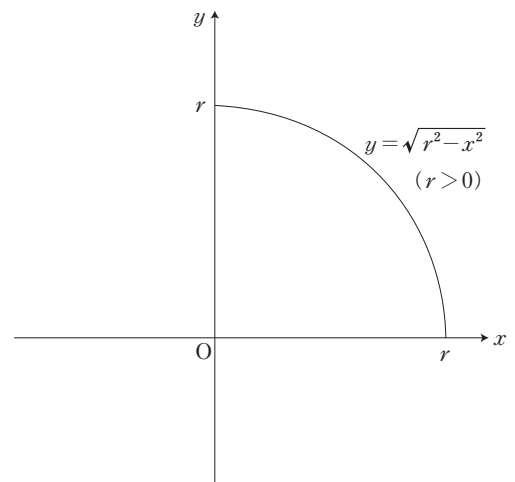
方針

誘導に従って計算するだけの問題です。 y について解いた時点で E が楕円であることは予想がつくでしょう。面積計算については正直に計算しなくても「 A による1次変換で図形の面積は $|A|$ 倍される」ということを知っているると便利です。

E' の面積を $\frac{1}{|A|} (= \frac{1}{5})$ 倍することで E の面積が求まりますが、解答では正直に積分計算をしておきます。

ココがポイント

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 4 \text{分円の面積} = \frac{\pi}{4} r^2$$

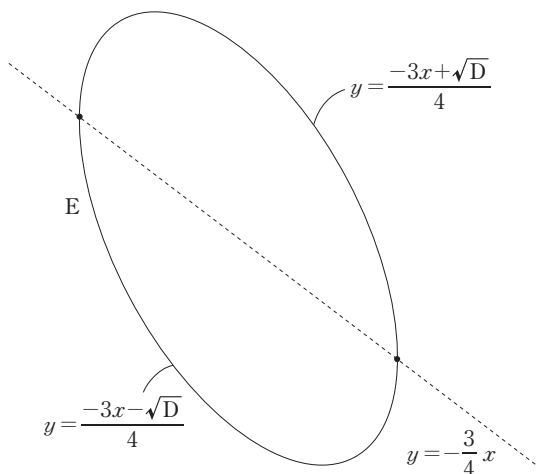


解

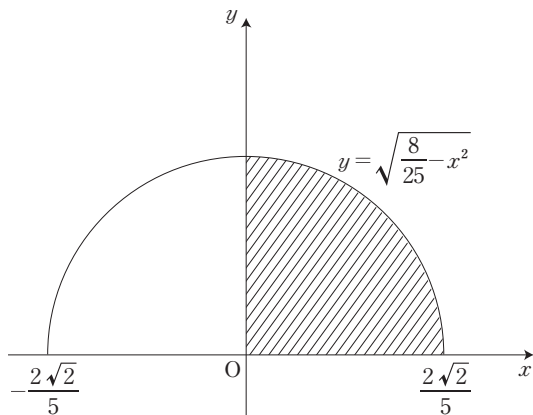
$$\begin{aligned}
 E: 17x^2 + 12xy + 8y^2 &= 4 \\
 \Leftrightarrow 8y^2 + 12xy + (8y^2 - 4) &= 0 \\
 \Leftrightarrow y &= \frac{-3x \pm \sqrt{8-25x^2}}{4}
 \end{aligned}$$

 $D = 8 - 25x^2 \geq 0$ より x の変域は

$$-\frac{2\sqrt{2}}{5} \leq x \leq \frac{2\sqrt{2}}{5}$$


 E で囲まれる面積 S は

$$\begin{aligned}
 S &= 2 \int_{-\frac{2\sqrt{2}}{5}}^{\frac{2\sqrt{2}}{5}} \left\{ -\frac{3}{4}x - \left(-\frac{3}{4}x - \frac{\sqrt{8-25x^2}}{4} \right) \right\} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{2\sqrt{2}}{5}}^{\frac{2\sqrt{2}}{5}} \sqrt{8-25x^2} dx \\
 &= \int_0^{\frac{2\sqrt{2}}{5}} \sqrt{8-25x^2} dx = 5 \int_0^{\frac{2\sqrt{2}}{5}} \sqrt{\frac{8}{25} - x^2} dx \\
 &= 5 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{8}{25} = \frac{2}{5} \pi
 \end{aligned}$$


 A で表される 1 次変換によって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ とすると}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x' = \frac{1}{5}(x' + 2y') \\ y' = \frac{1}{5}(-2x' + y') \end{cases} \dots (*)$$

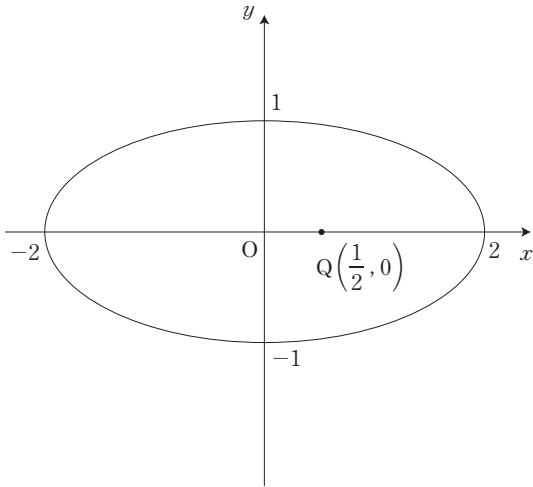
$E: 17x^2 + 12xy + 8y^2 = 4 \dots \textcircled{1}$

 $(*)$ を $\textcircled{1}$ に代入して

$$\begin{aligned}
 E': \frac{17}{25}(x' + 2y')^2 + \frac{12}{25}(x' + 2y')(-2x' + y') \\
 + \frac{8}{25}(-2x' + y')^2 = 4
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 25x'^2 + 100y'^2 = 100$$

$$E': \frac{x'^2}{4} + y'^2 = 1$$



E' 上の点 $P(2 \cos \theta, \sin \theta)$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) と点 $Q\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ との距離について

$$\begin{aligned}
 PQ^2 &= \left(2 \cos \theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \sin^2 \theta \\
 &= 4 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta + \frac{1}{4} + (1 - \cos^2 \theta) \\
 &= 3 \left(\cos \theta - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{11}{12}
 \end{aligned}$$

$$PQ \text{ の最小値は } \sqrt{\frac{11}{12}} = \frac{\sqrt{33}}{6} \left(\cos \theta = \frac{1}{3} \text{ のとき} \right)$$

来月号では、愛知医科大学の数学を攻略しますので、ご期待ください！

全12校の掲載予定は以下のとおりとなっております。

- 第13回 / 4月号 東京女子医科大学
- 第14回 / 5月号 北里大学医学部
- 第15回 / 6月号 聖マリアンナ医科大学
- 第16回 / 7月号 金沢医科大学
- 第17回 / 8月号 東京慈恵会医科大学
- 第18回 / 9月号 杏林大学医学部
- 第19回 / 10月号 愛知医科大学
- 第20回 / 11月号 岩手医科大学医学部
- 第21回 / 12月号 東邦大学医学部
- 第22回 / 1月号 昭和大学医学部
- 第23回 / 2月号 東京医科大学
- 第24回 / 3月号 日本大学医学部

「東大螢雪会」では、本誌をご覧の方々の学力アップのために、主要な私立大学医学部の予想問題を無料でプレゼントしています。ご希望の方は、「東大螢雪会」のホームページ (<http://www.keisetsukai.com>) (PC・携帯) からお問い合わせください。



—— 数学マスターへの道標 ——

〈数学ができるようになるための7つのルール〉

1. **定義**を叩き込む。定義に戻って考える習慣は理系科目では必須ですが、高校以前では残念ながら徹底されていないようです。
2. **記号の意味**を自分の言葉で説明できるようになるまで、記号に慣れ親しむ。
3. **定理・公式の導出**を自力でできるようにする。応用問題の考え方・解法が凝縮されています。
4. **視覚化**を考える。これが数学なのです。図やグラフを利用することで問題の意味が見えるようになります。
5. **好き**になる。「好きこそ物の上手なれ」を現代語に訳してみてください。
6. **自然**さと**自由**さを尊ぶ。数学は考えられている以上に自然で自由なものです。こう感じる事ができれば、自ずとできるようになるでしょう。
7. **暗記に頼らない**。「わからないから暗記する」は絶対に禁物です。暗記に頼るのは数学の学習の上で大きなハンディを背負うこととなります。暗記による害は簡単にまとめると以下の2つです。
 - 1) 学習を進める上で必要な事項の理解ができていないことを無視してしまうので、数学の学習の王道である「理解の積み重ね」を放棄することになり、伸び悩みの元凶になる。
 - 2) わからないまま暗記したものは必ず忘れる。数学は一度理解すれば案外簡単で、後しばらくはスラスラと進むものです。わからなければ立ち止まって考えるもよし、指導を仰ぐもよし、とにかくわかるための努力が必要です。決して暗記に逃げてはいけません。