# 東大螢雪会 医学部数学 攻略演習

マンツーマン指導で医歯薬学部に多くの合格者を輩出している「東大螢雪会」では，主要な私立大学医学部の予想問題を作成しています。このコーナーでは，「東大螢雪会」の作成した予想問題を用いて，主要な私立大学医学部の数学を攻略するための演習を行います。毎号１校分の演習を行い，全12校の連載となる予定です。

今月号では，金沢医科大学の数学を攻略します！

---

## 第８回 金沢医科大学 編

東大螢雪会講師　小池　淳

---

金沢医科大学の数学は，制限時間60分で大問４題程度の出題です。以前はかなりの難問も出題されていましたが，新課程移行後は素直な出題が続いていますので，75％程度の得点率を確保したいところです。今回の予想問題にも難問はなく，全て標準的な良問ですので高得点を目指して下さい。

### 1

(1)　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ が次の条件を満たすとする。

$S_{n+2}=3S_{n+1}-2S_n+6\ (n=1,2,3,\cdots)$　$S_1=-4$，$S_2=-6$

このとき，$a_{n+1}=\boxed{\text{ア}}\,a_n-\boxed{\text{イ}}$ となる。よって，

$a_n=\boxed{\text{ウ}}^{\,n}-\boxed{\text{エ}}$ であり，$S_n=\boxed{\text{オ}}^{\,n+1}-\boxed{\text{カ}}\cdot n-\boxed{\text{キ}}$ となる。

(2)　四角形 $ABCD$ において，対角線 $AC$ と $BD$ の交点を $Q$ とする。$AB=10$，$\angle ABC=\angle CAD=45^\circ$ で，$\angle ACB=\angle ADC=60^\circ$ である。このとき，辺 $AC$ の長さは $\dfrac{\boxed{\text{クケ}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$，辺 $CD$ の長さは $\dfrac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。また，三角形 $CBQ$ の面積は三角形 $ADQ$ の面積の $\boxed{\text{ソ}}$ 倍であり，

$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=\boxed{\text{タチ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}-\boxed{\text{テ}}$ である。

(3)　$x$，$y$，$z$ が $x+y+z=2$，$x^2+y^2+z^2=14$, $x^3+y^3+z^3=20$ を満たす。$x$，$y$，$z$ は３次方程式

$t^3-\boxed{\text{ト}}\,t^2-\boxed{\text{ナ}}\,t+\boxed{\text{ニ}}=0$ の３つの解であり，$x\leqq y\leqq z$ とすると，

$x=-\boxed{\text{ヌ}}$, $y=\boxed{\text{ネ}}$, $z=\boxed{\text{ノ}}$ である。

### 2

$I_n=\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{-x}\sin nx\,dx$, $J_n=\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{-x}\cos nx\,dx\ (n=1,2,3\cdots)$ とすると，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n=\boxed{\text{ハ}}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}J_n=\boxed{\text{ヒ}}$ である。$a_n=I_n-J_n$ が最大となるのは，$n=\boxed{\text{フ}}$，$\boxed{\text{ヘ}}$ のときで，

このとき $a_n=\dfrac{\boxed{\text{ホ}}-e^{-\boxed{\text{マ}}\pi}}{\boxed{\text{ミ}}}$ である。

## 1

(1)

**方　針**

「$n \geqq 2$のとき $S_n - S_{n-1} = a_n$」を利用して $a_n$ の漸化式にするのがよいでしょう。一般的には3項間線形漸化式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ が得られますが，本問は $p+q=1$ という特別なタイプです。この場合は2項間漸化式として解けるので，その方が早いでしょう。

**解**

$$\left.\begin{array}{l} S_1 = -4 \\ S_2 = -6 \end{array}\right\} \cdots\cdots (*)$$

$S_{n+2} = 3S_{n+1} - 2S_n + 6 \cdots ①$

$\Leftrightarrow S_{n+2} - S_{n+1} = 2(S_{n+1} - S_n) + 6$

$S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$

$S_{n+2} - S_{n+1} = a_{n+2}$　より

$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 6 \cdots ②$

ところで

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -4 \\ a_1 + a_2 = -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -4 \\ a_2 = -2 \end{cases}$$

したがって②は $n=0$ のときも成立するので

$a_{n+1} = 2a_n + 6$　$(n = 1, 2, 3, \cdots)$

$\therefore a_{n+1} + 6 = 2(a_n + 6)$

$\{a_n + 6\}$ は公比2，初項 $a_1 + 6 = 2$ の等比数列であるから

$a_n + 6 = 2 \cdot 2^{n-1}$

$\therefore a_n = 2^n - 6$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (2^k - 6) = 2 \cdot \frac{2^n - 1}{2-1} - 6n$$

$$= 2^{n+1} - 6n - 2$$

**注**

①は定数項を含む漸化式ですが，定数項が0のときの特性方程式を利用して以下のように2通りに変形して解くことができます。本問では特性方程式の解が1を含むので $S_n$ の階差（つまり $a_n$）に注目すると通常の2項間線形漸化式が得られます。

$S_{n+2} = pS_{n+1} + qS_n + r \cdots ③$

$x^2 = px + q$ の2解を $\alpha$，$\beta$ とすると

$$③ \Leftrightarrow \begin{cases} S_{n+2} - \alpha S_{n+1} = \beta(S_{n+1} - \alpha S_n) + r \\ S_{n+2} - \beta S_{n+1} = \alpha(S_{n+1} - \beta S_n) + r \end{cases}$$

$S_{n+1} - \alpha S_n = T_n$

$S_{n+1} - \beta S_n = U_n$ とおくと

$T_{n+1} = \beta T_n + r$

$U_{n+1} = \alpha U_n + r$

これより $T_n$ と $U_n$ の一般項が求まるので

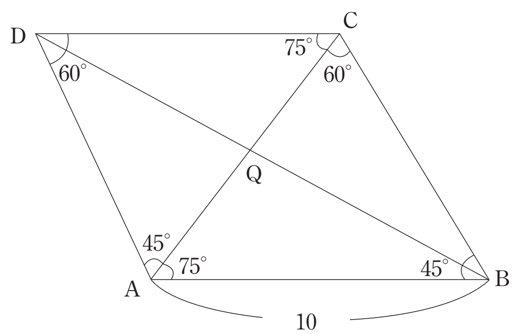
$S_n = \dfrac{1}{\beta - \alpha}(T_n - U_n)$ として $S_n$ の一般項が求まります。

(2)

**方　針**

3つの角が等しいので $\triangle ABC \backsim \triangle CAD$ はもちろんですが，$\triangle ABQ \backsim \triangle CDQ$ も利用しましょう。

**解**




$\triangle ABC$ に正弦定理を用いて

$$\frac{AC}{\sin 45^\circ} = \frac{AB}{\sin 60^\circ} \quad \therefore AC = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} AB = \frac{10}{3}\sqrt{6}$$

$\triangle ABC \backsim \triangle CAD$ より

$$AB : AC = CA : CD \quad \therefore CD = \frac{AC^2}{AB} = \frac{20}{3}$$

また $\angle QAB = \angle QCD = 75^\circ$ より

$\triangle ABQ \backsim \triangle CDQ$ で相似比は

$$AB : CD = 10 : \frac{20}{3} = 3 : 2$$

$\therefore AQ : QC = 3 : 2$

$$\therefore \triangle CBQ = \frac{QC}{AC} \triangle ABC$$

$\therefore \triangle CBQ=\dfrac{2}{5}\triangle ABC$…①

また $\triangle ADQ=\dfrac{3}{5}\triangle ACD=\dfrac{3}{5}\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\triangle ABC$

$\therefore \triangle ADQ=\dfrac{4}{15}\triangle ABC$…②

①，②より $\triangle CBQ=\dfrac{3}{2}\triangle ADQ$

$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=-\overrightarrow{AQ}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AQ})$

$=-\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{AB}-\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AC}\right)$

$=-\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\dfrac{9}{25}|\overrightarrow{AC}|^2$

$=-\dfrac{3}{5}\cdot 10\cdot\dfrac{10}{3}\sqrt{6}\cos 75^\circ+\dfrac{9}{25}\cdot\left(\dfrac{10\sqrt{6}}{3}\right)^2$

$=-20\sqrt{6}\cdot\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+\dfrac{9}{25}\cdot\dfrac{100}{9}\cdot 6$

$=10\sqrt{3}-6$

(3)

**方　針**

**ココがポイント**

3次方程式の解と係数の関係

3次方程式 $at^3+bt^2+ct+d=0\,(a\neq 0)$

の3解を $\alpha$，$\beta$，$\gamma$ とすると

$$(*)\cdots\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}\\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}\end{cases}$$

したがって

$$\begin{cases}x+y+z=p\\ xy+yz+zx=q\\ xyz=r\end{cases}\quad \text{のとき}$$

$x$，$y$，$z$ はたとえば $t$ の方程式

$t^3-pt^2+qt-r=0$ の3解である。ということになります。

なお（$*$）は $t$ の恒等式

$at^3-bt^2+ct-d=a(t-\alpha)(t-\beta)(t-\gamma)$

について右辺を展開して係数を比較することによって簡単に確かめられます。

また

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta+\gamma\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\\ \alpha\beta\gamma\end{array}\right\}\ \text{を3文字の「基本対称式」といって，}$$

3文字の任意の対称式（どの2文字を入れかえても不変な式）は基本対称式のみで表されます。

**例**

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

3乗の和 $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$ については公式

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma$

$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$ より

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

$=(\alpha+\beta+\gamma)\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}+3\alpha\beta\gamma$

となります。

**解**

$$\begin{cases}x+y+z=2\cdots①\\ x^2+y^2+z^2=14\cdots②\\ x^3+y^3+z^3=20\cdots③\end{cases}$$

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=14$

$\therefore 4-2(xy+yz+zx)=14$

$\therefore xy+yz+zx=-5$…④

$x^3+y^3+z^3$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$

$\therefore 20=2(14+5)+3xyz$

$\therefore xyz=-6$…⑤

$\therefore$ {①, ②, ③} $\Leftrightarrow$ {①, ④, ⑤}

$x$，$y$，$z$ は $t$ の3次方程式 $t^3-2t^2-5t+6=0$ の3解。

$(t-1)(t^2-t-6)=0$

$(t-1)(t-3)(t+2)=0$

$x\leqq y\leqq z$ とすると

$x=-2$，$y=1$，$z=3$

$\boxed{2}$

**方　針**

$I_n$ と $J_n$ は別々に計算するとそれぞれ2回の部分積分が必要なタイプでやや面倒です。１回だけ部分積分して連立方程式にするのが得策です。また $a_n$ の最大は増減を調べるため，$a_{n+1}-a_n$ の符号を考えます。

**ココがポイント**

$a_n$ の最大・最小は $a_{n+1}-a_n$ の符号変化を調べる。

**解**

$$I_n=\int_0^{2\pi}(-e^{-x})'\sin nx dx$$

$$=\left[-e^{-x}\sin nx\right]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}-e^{-x}\cdot n(0)xdx$$

$$=n\int_0^{2\pi}-e^{-x}\cos nx dx=nJ_n$$

$$J_n=\int_0^{2\pi}(-e^{-x})'\cos nx dx$$

$$=\left[-e^{-x}\cos nx\right]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}-e^{-x}\cdot n(-\sin nx)dx$$
$$=-(e^{-2\pi}-1)-nI_n$$

$$\therefore\begin{cases}I_n=nJ_n\\ J_n=-e^{-2\pi}+1-nI_n\end{cases}$$

これを $I_n$ と $J_n$ について解いて

$$\begin{cases}I_n=\dfrac{(1-e^{-2\pi})n}{n^2+1}\\ J_n=\dfrac{1-e^{-2\pi}}{n^2+1}\end{cases}$$

$$a_n=I_n-J_n$$
$$=(1-e^{-2\pi})\frac{n-1}{n^2+1}$$

$$\therefore a_{n+1}-a_n$$
$$=(1-e^{-2\pi})\left\{\frac{n}{(n+1)^2+1}-\frac{n-1}{n^2+1}\right\}$$
$$=(1-e^{-2\pi})\frac{n(n^2+1)-(n-1)\{(n+1)^2+1\}}{\{(n+1)^2+1\}(n^2+1)}$$
$$=-(1-e^{-2\pi})\frac{(n-2)(n+1)}{\{(n+1)^2+1\}(n^2+1)}$$

$\therefore n\geqq 3$ のとき $a_n>a_{n+1}$

　$n=2$ のとき $a_n=a_{n+1}$　$(a_2=a_3)$

　$n=1$ のとき $a_n<a_{n+1}$　$(a_1<a_2)$

$\therefore a_1<a_2=a_3>a_4>\cdots$

　よって $a_n$ が最大になるのは $n=2$，3のときで

　このとき $a_n=a_2(=a_3)=\dfrac{1-e^{-2\pi}}{5}$

　来月号では，東京女子医科大学の数学を攻略しますので，ご期待ください！

　全12校の掲載予定は以下のとおりとなっております。

第１回／４月号　東京医科大学
第２回／５月号　昭和大学医学部
第３回／６月号　杏林大学医学部
第４回／７月号　愛知医科大学
第５回／８月号　北里大学医学部
第６回／９月号　聖マリアンナ医科大学
第７回／10月号　岩手医科大学医学部
第８回／11月号　金沢医科大学
第９回／12月号　東京女子医科大学
第10回／１月号　東京慈恵会医科大学
第11回／２月号　東邦大学医学部
第12回／３月号　日本大学医学部