# 東大螢雪会 医学部数学 攻略演習

マンツーマン指導で医歯薬学部に多くの合格者を輩出している「東大螢雪会」では，主要な私立大学医学部の予想問題を作成しています。このコーナーでは，「東大螢雪会」の作成した予想問題を用いて，主要な私立大学医学部の数学を攻略するための演習を行います。毎号１校分の演習を行い，全12校の連載となる予定です。

今月号では，岩手医科大学医学部の数学を攻略します！

## 第７回 岩手医科大学医学部 編

東大螢雪会講師　小池　淳

岩手医科大学医学部の数学は，制限時間60分で大問３題の出題がここ数年続いています。比較的取り組みやすい問題が多いのが特徴であり，仮に類型的ではない問題が出題されたとしても，穏当な考察で解決します。そのため，毎年高得点が必要となります。今回の予想問題も，ワンミスくらいでクリアしたいところです。

### 1

座標平面上で円 $C_1 : x^2+y^2=1$ と放物線 $C_2 : y=x^2+5$ がある。

⑴　$C_1$ と $C_2$ に同時に接する直線の方程式をすべて求めよ。

⑵　⑴の接線のうち，傾きが最小のものと $C_1$ 及び $C_2$ との接点をそれぞれ求めよ。

⑶　⑴の接線のうち，傾きが最大のもの，傾きが最小のもの，$C_2$ で囲まれる領域の面積を求めよ。

### 2

$A$，$B$，$C$ は２行２列の行列で，$AB^2C=AB=\begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -5 & 14 \end{pmatrix}$，$ABC=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ のとき，行列 $BC$，$B$，$C$ をそれぞれ求めよ。

### 3

$\triangle ABC$ において，$BC=a$，$CA=3$，$AB=4$ とする。$\triangle ABC$ の重心を $G$ とし，$\triangle ABC$ の内心を $I$ とするとき，次の問いに答えよ。

⑴　$\overrightarrow{AG}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。

⑵　$\overrightarrow{AI}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$a$ を用いて表せ。

⑶　$GI \parallel BC$ となるように $a$ を定めよ。

(4)　$GI \perp BC$ となるように $a$ を定めよ。

## $\boxed{1}$

**方　針**

(1)は放物線 $C_2$ の接点の $x$ 座標を $t$ とおいて接線の式を表し，それが $C_1$ と接する条件（⇔接線と中心の距離＝半径）を $t$ の方程式とするのがよいでしょう。点と直線の距離の公式の出番です。

**ココがポイント**

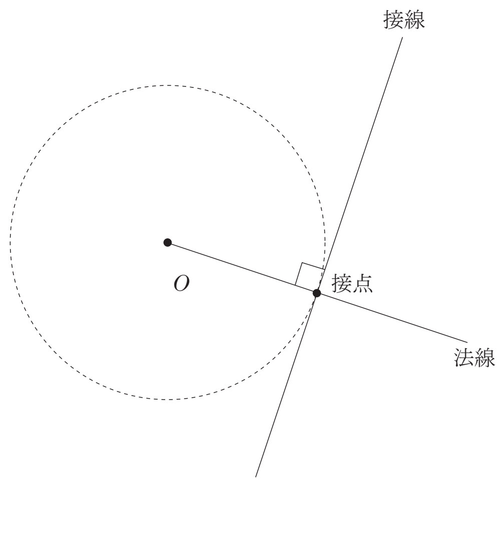
$y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y=f'(t)(x-t)+f(t)$$

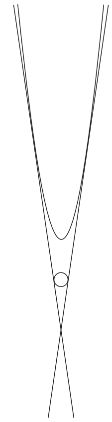
(2)は円と接線の接点を求める単純な計算ですが，本問の解答のように円の接点をおいていない場合に手こずる人が多いようです。本問では，円の方程式は使わずに，接線の式 ① → 法線の式② と考えます。つまり「円の中心を通って接線に垂直な直線」として法線の式 ② をつくり，連立方程式 {①，②} を解くのがセオリーです。

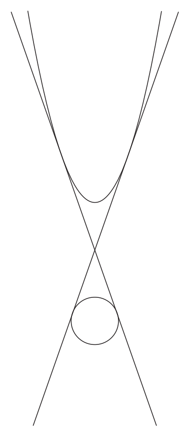
**ココがポイント**

円と接線の接点 → 接線と法線の交点




(3)は有名なパターンの問題であり，結果も有名ですが，上手に計算しましょう。放物線とその接線ではさまれる部分の面積は完全平方式の積分になります。くれぐれも展開した形のまま計算しないように気をつけて下さい。なお $C_1$ と $C_2$ の共通接線は下図のとおりに4本存在します。





**解**

(1)　$C_2$ 上の接点 $(t,\ t^2+5)$ とおくと

接線の式は $y=2t(x-t)+t^2+5$

$\therefore\ y=2tx-t^2+5 \Leftrightarrow 2tx-y-t^2+5=0$

これが $C_2$ と接するとき中心 $(0,\ 0)$ との距離が半径1に等しいので

$$\frac{|t^2-5|}{\sqrt{4t^2+1}}=1$$

（両辺≧0 なので2乗して分母を払っても同値）

$\Leftrightarrow (t^2-5)^2=4t^2+1$

$\therefore\ t^4-14t^2+24=0$

$(t^2-2)(t^2-12)=0$

$t^2=2,\ 12$

$t=\pm\sqrt{2},\ \pm2\sqrt{3}$

$\therefore\ y=\pm2\sqrt{2}\,x+3,\ y=\pm4\sqrt{3}\,x-7$

⑵　⑴の接線のうち，傾きが最小

$(=-4\sqrt{3},\ t=-2\sqrt{3})$ なものは

$l_1 : y=-4\sqrt{3}\,x-7$

$l_1$ と $C_2$ の接点は $l_1$ と法線 $n : y=\dfrac{1}{4\sqrt{3}}x$

（中心 O を通って $l_1$ に垂直な直線）との交点。

$$\begin{cases} y=-4\sqrt{3}\,x-7 \\ y=\dfrac{1}{4\sqrt{3}}x \end{cases}$$ より

$$\left(\frac{1}{4\sqrt{3}}+4\sqrt{3}\right)x=-7$$

$$\frac{49}{12}\sqrt{3}\,x=-7$$

$$\therefore\ x=-\frac{12}{7\sqrt{3}}$$

$$=-\frac{4}{7}\sqrt{3}$$

$$\therefore\ y=\frac{1}{7}$$

$\therefore\ C_2$ との接点 $\left(-\dfrac{4}{7}\sqrt{3},\ \dfrac{1}{7}\right)$

$C_1$との接点は⑴より $(-2\sqrt{3},\ 17)$

⑶　⑴の接線のうち傾きが最大

$(=4\sqrt{3},\ t=2\sqrt{3})$ なものは

$l_2 : y=4\sqrt{3}\,x-7$

$l_1,\ l_2,\ C_2$ で囲まれる領域の面積 $S$ は $y$ 軸対称なので

$$S=2\int_0^{2\sqrt{3}}\{x^2+5-(4\sqrt{3}\,x-7)\}\,dx$$

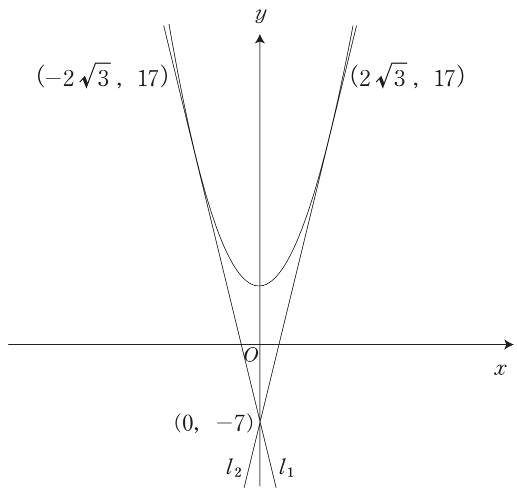
$$=2\int_0^{2\sqrt{3}}(x^2-4\sqrt{3}\,x+12)\,dx$$

$$=2\int_0^{2\sqrt{3}}(x-2\sqrt{3})^2\,dx$$

$$=2\left[\frac{1}{3}(x-2\sqrt{3})^3\right]_0^{2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot8\cdot3\sqrt{3}$$

$$=16\sqrt{3}$$




$\boxed{2}$

**ココがポイント**

2 次正方行列 $P,\ Q$ について

$E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ として

$PQ=E \Leftrightarrow QP=E$

（$\Leftrightarrow P,\ Q$ は互いに逆行列）

**ココがポイント**

$A^{-1}$ が存在するとき

$AX=B \Leftrightarrow X=A^{-1}B$

$XA=B \Leftrightarrow X=BA^{-1}$

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ について

$\Delta=ad-bc\neq0$ のとき $A^{-1}$ が存在して

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$$

解

$$\begin{cases} AB^2C=AB=\begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -5 & 14 \end{pmatrix} \\ ACB=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AB\cdot BC=AB\cdots① \\ AB=\begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -5 & 14 \end{pmatrix}\cdots② \\ ACB=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\cdots③ \end{cases}$$

①; $\begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -5 & 14 \end{pmatrix}BC=\begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -5 & 14 \end{pmatrix}$ （∵ ②）

両辺に左から $\begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -5 & 14 \end{pmatrix}^{-1}$ をかけて

$$BC=\begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -5 & 14 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -5 & 14 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$CB=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdots④$$

③; $A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\therefore\ A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

②より $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}B=\begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -5 & 14 \end{pmatrix}$

左から $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$ をかけて

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -5 & 14 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -5 & 14 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

④より

$$C=B^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

## 3

方　針

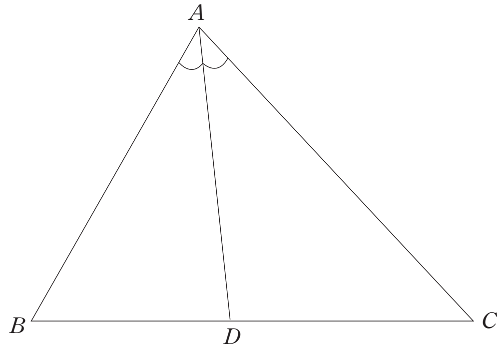
重心については問題ないでしょう。内心については三角形の内角の２等分線の性質をフル活用します。

**ココがポイント**

$\angle A$ の２等分線を $AD$ とすると

$BD:CD=AB:AC$

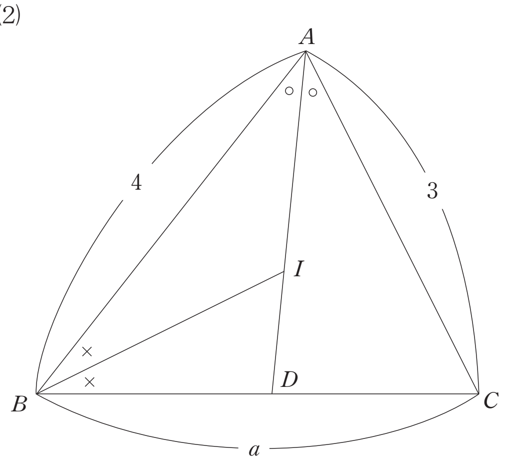
$[=\triangle ABD:\triangle ACD]$




解

(1) $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

(2)




$\triangle ABC$ において $\angle A$ の２等分線と $BC$ との交点を $D$ とすると $BD:CD=AB:AC=4:3$

$\therefore\ \overrightarrow{AD}=\dfrac{3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}}{7}\cdots①$

$\triangle ABD$ において $\angle B$ の２等分線と $AD$ との交点が $I$ なので

$AI:DI=BA:BD$

$=4:\dfrac{4}{7}a=7:a$

$\therefore\ \overrightarrow{AI}=\dfrac{7}{a+7}\overrightarrow{AD}$

$$=\frac{7}{a+7}\cdot\frac{3\,\overrightarrow{AB}+4\,\overrightarrow{AC}}{7}\quad(\because\ ①)$$
$$=\frac{3\,\overrightarrow{AB}+4\,\overrightarrow{AC}}{a+7}$$

(注) 一般に$AB=c$, $BC=a$, $CA=b$とすると

$$\overrightarrow{AI}=\frac{b\,\overrightarrow{AB}+c\,\overrightarrow{AC}}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OI}=\frac{a\,\overrightarrow{OA}+b\,\overrightarrow{OB}+c\,\overrightarrow{OC}}{a+b+c}$$ ($O$は任意の点)

となります。

(3)

$$\overrightarrow{GI}=\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AG}$$
$$=\frac{3\,\overrightarrow{AB}+4\,\overrightarrow{AC}}{a+7}-\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}$$
$$=\frac{-a+2}{3(a+7)}\overrightarrow{AB}+\frac{-a+5}{3(a+7)}\overrightarrow{AC}\ \cdots ②$$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\ \cdots ③$

$GI \parallel BC$のとき

$\overrightarrow{GI}=k\,\overrightarrow{BC}$ ( $k$は実数) とおけて，②と③より

$$\frac{-a+2}{3(a+7)}\overrightarrow{AB}+\frac{-a+5}{3(a+7)}\overrightarrow{AC}=-k\,\overrightarrow{AB}+k\,\overrightarrow{AC}$$

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$は1次独立なので

$$\begin{cases}\dfrac{-a+2}{3(a+7)}=-k\cdots ④\\[2mm] \dfrac{-a+5}{3(a+7)}=k\cdots ⑤\end{cases}$$

④+⑤より$-2a+7=0$ $\therefore\ a=\dfrac{7}{2}$

(4)

$GI\perp BC$のとき

$\overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

$\left\{(-a+2)\overrightarrow{AB}+(-a+5)\overrightarrow{AC}\right\}\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=0$

$\therefore (a-2)\left|\overrightarrow{AB}\right|^2-3\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+(-a+5)\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=0\cdots ⑥$

$$\begin{cases}\left|\overrightarrow{AB}\right|=4,\quad \left|\overrightarrow{AC}\right|=3\\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos A\\ \qquad =12\cdot\dfrac{4^2+3^2-a^2}{2\cdot4\cdot3}(\because\ 余弦定理)\\ \qquad =\dfrac{1}{2}(-a^2+25)\end{cases}$$

より⑥は

$$16(a-2)-\frac{3}{2}(-a^2+25)+9(-a+5)=0$$

$\therefore\ 3a^2+14a-49=0$

$(3a-7)(a+7)=0$

$a>0$より

$a=\dfrac{7}{3}$

来月号では，金沢医科大学の数学を攻略しますので，ご期待ください！

全12校の掲載予定は以下のとおりとなっております。

第１回／４月号　東京医科大学
第２回／５月号　昭和大学医学部
第３回／６月号　杏林大学医学部
第４回／７月号　愛知医科大学
第５回／８月号　北里大学医学部
第６回／９月号　聖マリアンナ医科大学
第７回／10月号　岩手医科大学医学部
第８回／11月号　金沢医科大学
第９回／12月号　東京女子医科大学
第10回／１月号　東京慈恵会医科大学
第11回／２月号　東邦大学医学部
第12回／３月号　日本大学医学部